

Teoria dei nodi A-2024/25 - PAOLO LISCA

Ricevimento: da fissare (2 ore settimanali)
(Su appuntamento)

Orario effettivo: [MA 18-19:30 Aula 01] ??
ME 14:15-15:45 Aula N

Sito Teams : iscrivetevi e rispondete al sondaggio.
2xmg19a Caricherò via via le mie note.

Testi consigliati: Burde-Zieschang, Cromwell, Lickorish

Teoria dei nodi = studio degli embedding
 $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ a meno di opportuna
 massima generalità - equivalenza (enfasi sull'immagine,
 tra poco la non sulla mappa): $\bigcirc, \bigcirc, \dots$
 diminuiranno

Def.: X, Y spazi topologici $\Rightarrow$ un'applicazione
 continua $f: X \rightarrow Y$ si dice **embedding** se stabilisce
 un omeomorfismo tra X ed $f(X) \subset Y$
 con la topologia indotta da Y .

Fatto (esercizio): un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$
 con X compatto e Y di Hausdorff, è un embedding
 se e solo se è iniettiva.

A questo punto possiamo definire un **nodo** K come (2)
l'immagine di un embedding $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

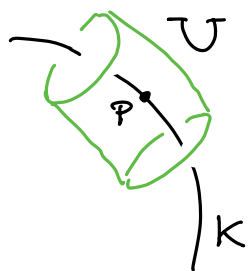
Ma i nodi maggiormente studiati sono di un tipo particolare.

Def: Un **nodo tame** è un sottoinsieme $K \subseteq \mathbb{R}^3$ dato dall'immagine di un embedding $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (quindi omeomorfo ad S^1) tale che:

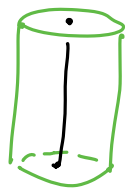
$\forall p \in K \quad \exists$ intorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ di p , con

$$U \xrightarrow[\approx]{\text{omeo.}} D^2 \times [0,1], \quad D^2 = \text{disco chiuso.}$$

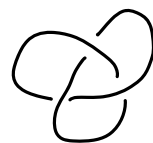
$$U \cap K \longleftrightarrow 0 \times [0,1]$$



$\approx$



Es.:



K si dice **localmente piatto** in p .

Esistono nodi non tame (=wild) - solo idea:

quinto non localmente piatto (fatto)



Da adesso in poi: **nodo = nodo tame**

Vogliamo considerare i nodi a meno di 'deformazioni': (3)

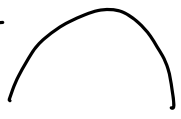
Equivalenza di nodi

$$O'' = O$$

Se $K_0 = f_0(S^1)$, $K_1 = f_1(S^1) \subseteq \mathbb{R}^3$,

Primo tentativo:

Si potrebbe definire K_0 equivalente a K_1 quando c'è una famiglia di embedding $\{f_t: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3\}_{t \in [0,1]}$ che commette f_0 a f_1 , ovvero un'applicazione continua $S^1 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ristretta a $S^1 \times t$ è un embedding $\forall t \in [0,1]$.
Ma è possibile dimostrare che in questo modo tutti i nodi sarebbero equivalenti.

Idea: $K_0 =$  $\dots K_{\frac{1}{2}} =$  $\dots K_1 =$ 

Definizione 'giusta':

Def: Due nodi $K_0, K_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ sono equivalenti

(o isotopi o uguali) se esiste un'isotopia ambiente che porta uno nell'altro, ovvero esiste un'applicazione continua $H: \mathbb{R}^3 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

- $H_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $H_t(x) := H(x,t)$, e' un omeomorfismo per ogni $t \in [0,1]$.
- $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $H_1(K_0) = K_1$

Oss: $K_0, K_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ nodi equivalenti.

(4)

$\Rightarrow (\mathbb{R}^3, K_0) \overset{\text{omeo.}}{\approx} (\mathbb{R}^3, K_1)$ come coppie.

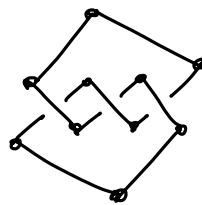
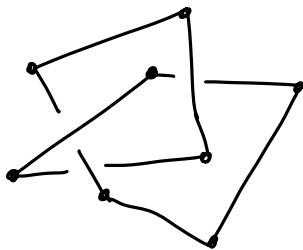
In particolare, $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 \overset{\text{omeo.}}{\approx} \mathbb{R}^3 \setminus K_1$

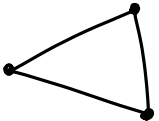
Fatto (dimostrato sul Cromwell):

Un nodo $K \subseteq \mathbb{R}^3$ è tame se e solo se è equivalente
facile più delicato

ad un'unione finita di segmenti lineari
(ovvero un nodo poligonale)

Esempi:



Def: il nodo banale è la classe di equivalenza
di  = bordo di un triangolo piano equilatero

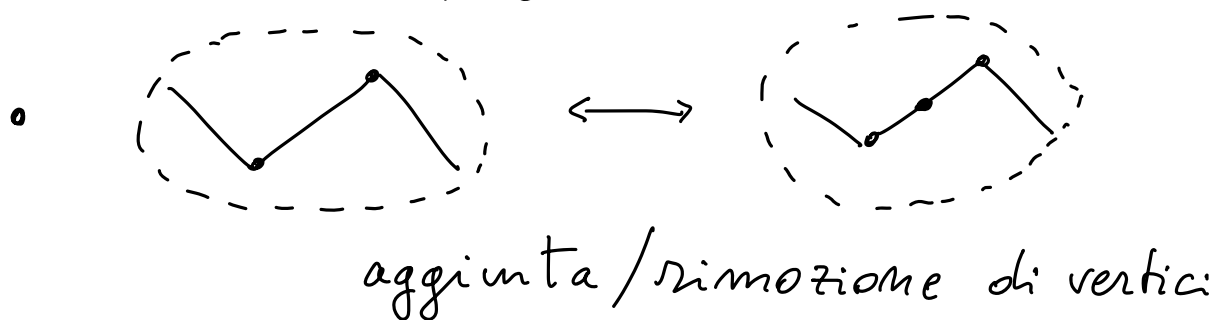
Da adesso in poi: nodo $\equiv$ nodo poligonale

Anche un disegno 'liscio'  in realtà indicherà
una poligonale con molti segmenti: 

Quanto detto finora continua a valere, con le ovvie modifiche, rimpiazzando S^1 con un'unione disgiunta finita $S^1 \cup \dots \cup S^1$. Le immagini di tali oggetti tramite embedding tame, a meno di isotopie ambientali, si chiamano **link**.

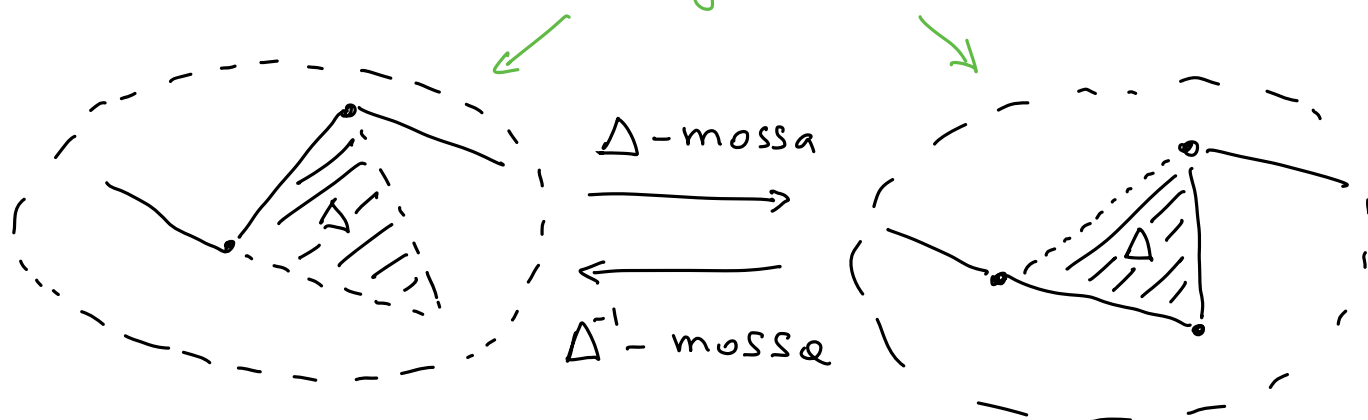
Fatto: due link poligonali $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$ sono **combinatorialmente equivalenti**:

$L \subseteq \mathbb{R}^3$ link poligonale,



• $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$ triangolo, $\Delta \cap L = \text{lato di } \Delta = \text{segmento di } L$
piano

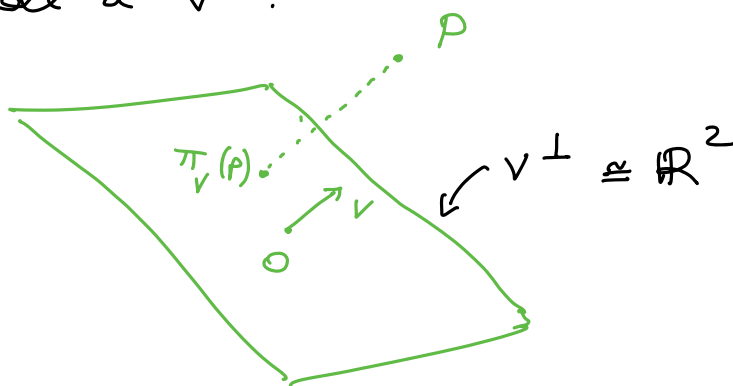
n.b.: figure 3-dimensionali



Due link L_1, L_2 sono combinatorialmente equivalenti (6)
se si ottengono uno dall'altro tramite n.ro finito di
aggiunte/rimozioni di vertici e $\Delta^{\pm 1}$ -mosse.

Proiezioni e diagrammi

Dato $v \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, abbiamo la proiezione $\pi_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$
sul piano ortogonale a v :



Sia $L \subseteq \mathbb{R}^3$, $v \in S^2$ e $\pi = \pi_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow v^\perp$

Un punto $x \in \pi(L) \subseteq v^\perp$ è:

regolare se $|\pi^{-1}(x)| = 1$,

singolare se $|\pi^{-1}(x)| > 1$,

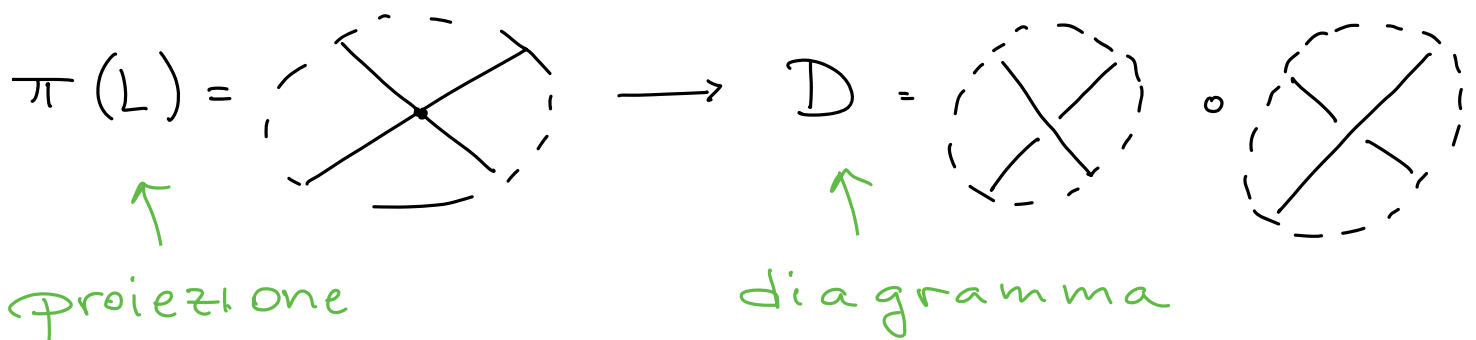
doppio se $|\pi^{-1}(x)| = 2$

Esercizio: dato link poligonale $L \subseteq \mathbb{R}^3$,
 $\exists$ aperto denso $U \subset S^2$ t.c.
 $\forall v \in U$ $\pi_v(L)$ soddisfa:

- $\nexists$ segmenti di L paralleli a v
- $x \in \pi_v(L)$ singolare $\Rightarrow \pi_v^{-1}(x)$ non contiene vertici, x è un punto doppio ed è intersezione trasversa delle immagini di due segmenti.

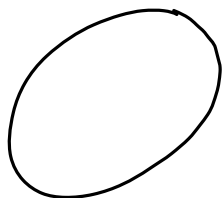
Per l'esercizio, dato $L \subset \mathbb{R}^3$ link (poligonale)
 $\exists$ proiezione **regolare** $\pi(L) \subseteq \mathbb{R}^2$, ovvero
 con n.ro finito di punti singolari, ciascuno
 dei quali, doppio e intersezione trasversa, è
 detto **incrocio**.

Def: Un **diagramma** $D \subset \mathbb{R}^2$ di un
 link $L \subset \mathbb{R}^3$ è una proiezione regolare di
 L decorata, con l'informazione "sopra/sotto"
 ad ogni incrocio:

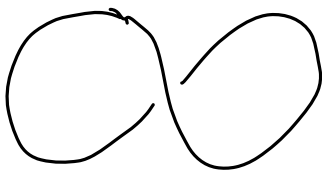


Esempi di diagrammi

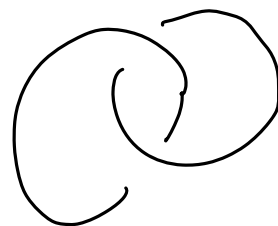
8



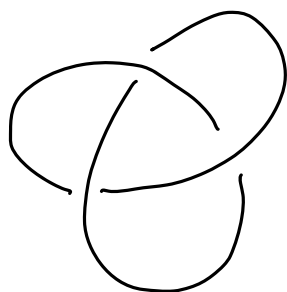
nodo banale



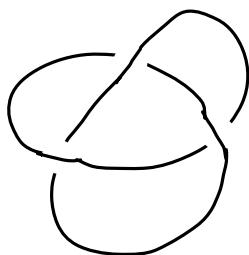
nodo banale



link di Hopf
(link a due componenti)



trifoglio destro



trifoglio
sinistro

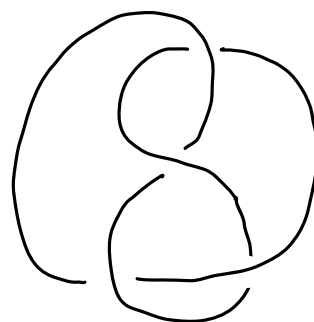


figura-8

Esercizio: Due link con lo stesso diagramma sono equivalenti.

Sorge una *domanda naturale*:

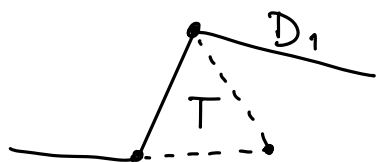
che relazione c'è tra i diagrammi di link equivalenti?

Possiamo restringerci a considerare due link poligonali $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ collegati da una Δ -mossa.

(1)

Se $L_1 \xrightarrow{\Delta} L_2$, applicando il ragionamento dell'esercizio assegnato si trova una proiezione $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ regolare sia per L_1 che per L_2 e tale che $T = \pi(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$ è un triangolo. Siano $D_i = \pi(L_i)$, $i = 1, 2$.

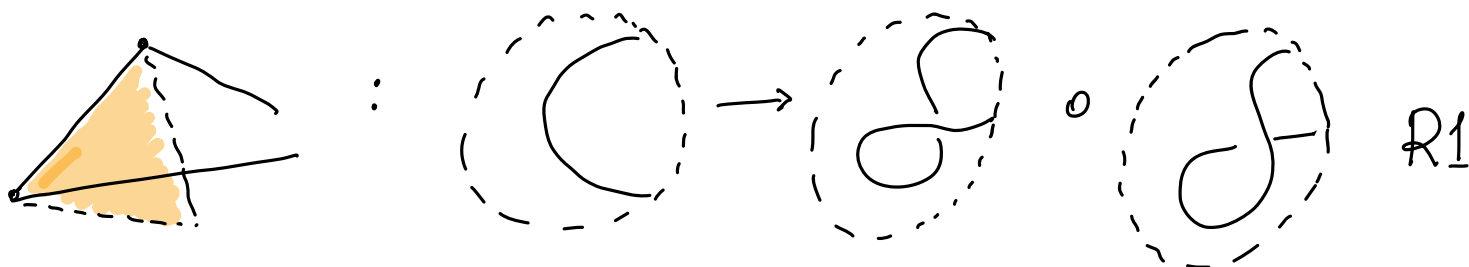
1° caso: $\overset{\circ}{T} \cap D_1 = \emptyset$:

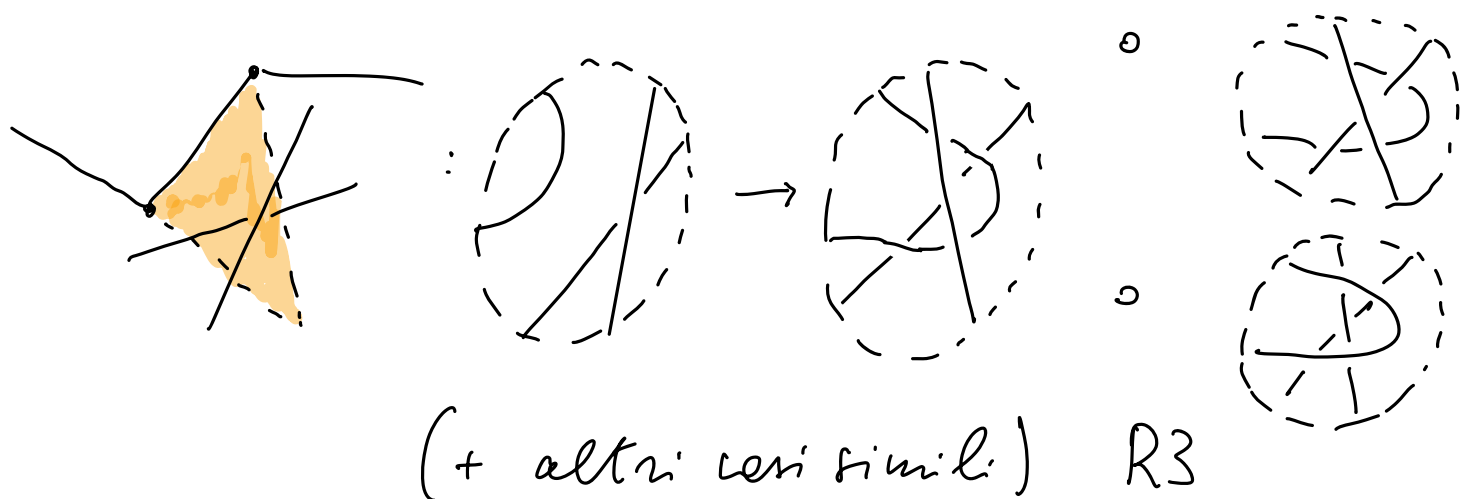
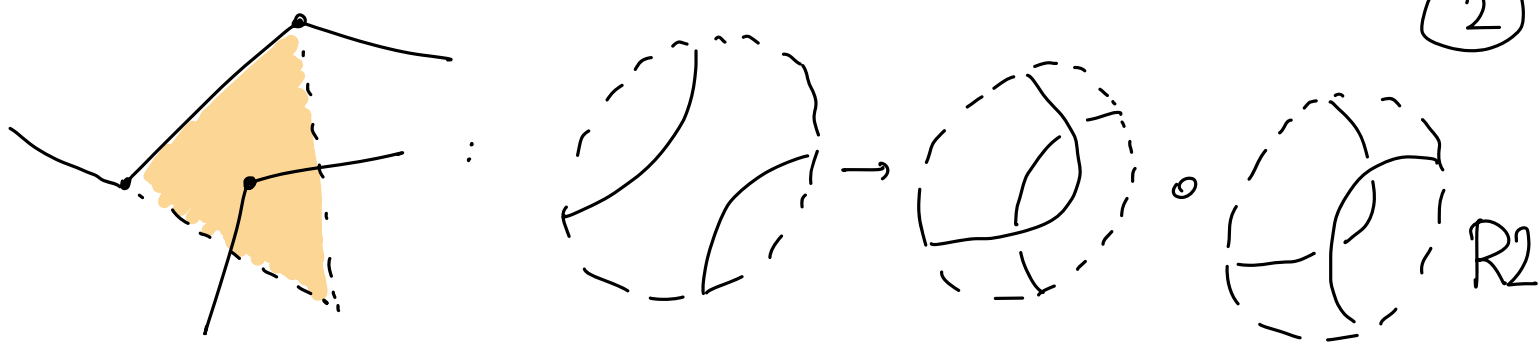


D_2 si ottiene da D_1 tramite un'isotopia planare (di $\mathbb{R}^2$).

2° caso: $\overset{\circ}{T} \cap D_1 \neq \emptyset$

Idea: a meno di decomporre la Δ -mossa nell'unione di Δ -mosse lungo triangoli più piccoli, si può supporre $\overset{\circ}{T} \cap D_1$ contenga al più un incrocio o un vertice di D_1 . Dopo di che si procede per casi. Esempi:





È chiaro che due link con diagrammi che differiscono per isotopie planari o mosse di tipo $R1, R2, R3$ sono equivalenti. Abbiamo quindi

Teorema (Reidemeister) :

Due diagrammi rappresentano link equivalenti $\Leftrightarrow$ sono collegati da successione finita di isotopie planari e mosse di tipo $R1, R2, R3$ e loro inverse.

Le isotopie planari e le mosse $R1, R2, R3$ si chiamano mosse di Reidemeister.

(3)

Il teorema di Reidemeister può essere usato per dimostrare che due link non sono equivalenti. Vediamo come.

Idea: definire un'applicazione

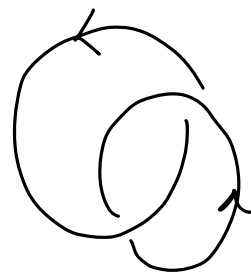
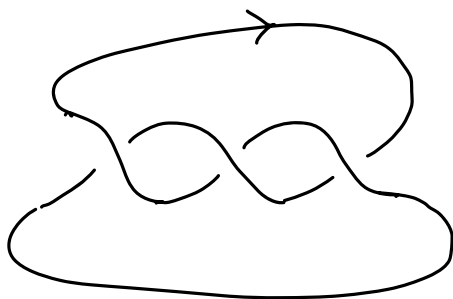
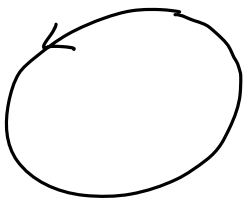
$$\phi: \{\text{diagrammi } D \subset \mathbb{R}^2\} \rightarrow S = \text{insieme}$$

tale che se D_1, D_2 sono diagrammi collegati

da mosse di Reidemeister allora $\phi(D_1) = \phi(D_2)$.

OSSERVAZIONE: possiamo considerare come oggetto di studio i link **orientati**, a meno di isotopie ambientanti. Tali oggetti hanno diagrammi orientati e il teorema di Reidemeister esiste in versione orientata.

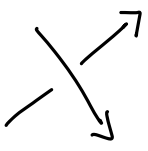
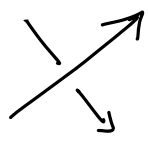
Esempi di diagrammi orientati:



Definizione: $L = \alpha \cup \beta \subset \mathbb{R}^3$ link orientato con due componenti. Un suo diagramma è della forma

$$\mathcal{D}_L = \mathcal{D}_\alpha \cup \mathcal{D}_\beta$$

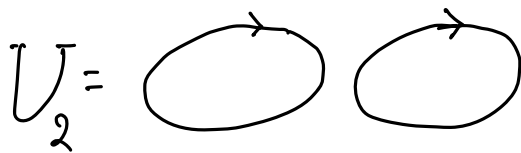
Dato un incrocio $c \in \mathcal{D}_L$, sia $\varepsilon(c) \in \{\pm 1\}$ dato da:

$c :$		
$\varepsilon(c) :$	$+1$	-1

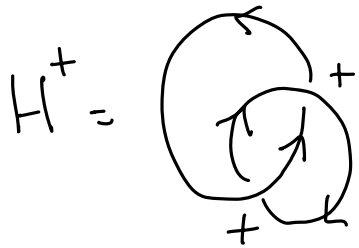
Infine, definiamo il **numero di allacciamento**

$$\text{lk}(L) := \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{D}_\alpha \cap \mathcal{D}_\beta} \varepsilon(c) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

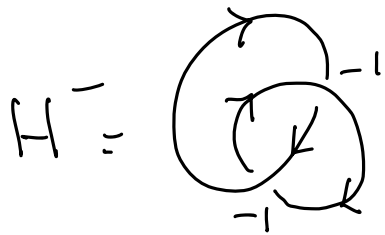
Esercizio: il numero di allacciamento è ben definito: L_1, L_2 equivalenti $\Rightarrow \text{lk}(L_1) = \text{lk}(L_2)$. Inoltre, $\text{lk}(L) \in \mathbb{Z}$. Infine, cambiando le orientazioni di tutte le componenti lk non cambia.

Esempi:

link banale :
 $lk = 0$ (per qualunque orientazione)



link di Hopf : $lk = +1$
 (positivo)



link di Hopf : $lk = -1$
 (negativo)

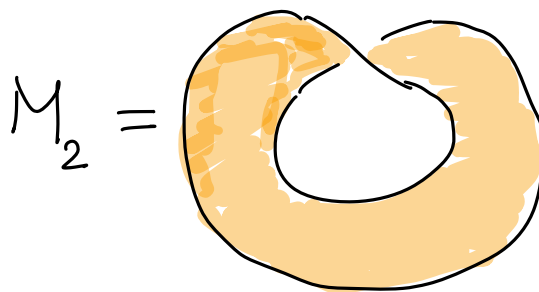
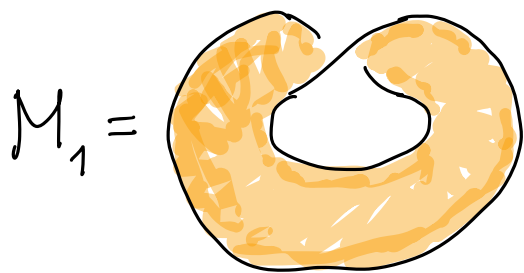
per il link di Hopf lk dipende dalla scelta dell'orientazione (è sempre ± 1).

Da questi esempi possiamo concludere:

- 1) il link U_2 e i link di Hopf H^+ , H^- sono a due a due distinti come link orientati;
- 2) il link U_2 e il link di Hopf sono distinti come link non orientati.

Esercizio: Siano $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$

i nastri di Möbius dati in figura.



Stabilire se esiste un omeomorfismo
 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isotopo all'identità tale che
 $f(M_1) = M_2$.

Definiamo ora alcune operazioni naturali
 sui link:

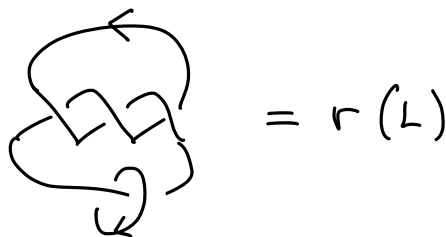
Esempio

$L \subset \mathbb{R}^3$ orientato



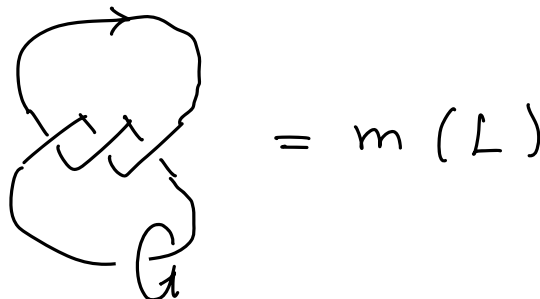
$r(L) = \text{reverse di } L$

L con orientazione opposta
 su ogni componente



$m(L) = \text{mirror di } L$

$= p(L)$, dove $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 riflessione rispetto
 ad un piano (ad esempio
 il piano di proiezione)



$$m(r(L)) = r(m(L)) = \text{inverse di } L$$

notazione: $-L$

Se $K \subset \mathbb{R}^3$ nodo, $K \not\sim m(K)$, K è *chirale*, altrimenti *anfichirale*.

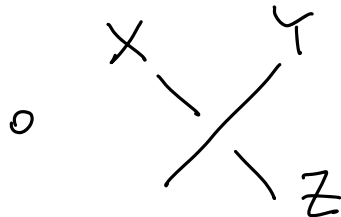
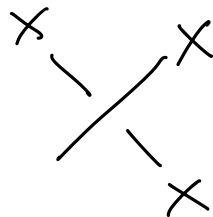
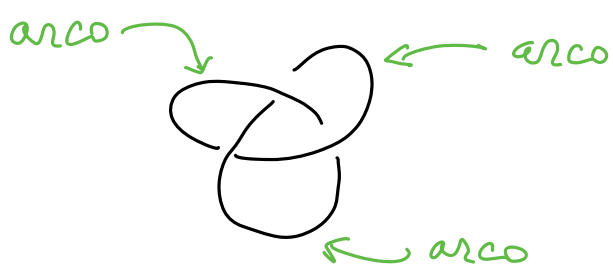
Esercizio: Mostrare che $m(H^\pm) \sim H^\mp$. Utilizzare il teo di Reidemeister per dimostrare che $r(H^\pm) \sim H^\pm$.
Dimostrare che $r(H^\pm) \sim H^\pm$ senza utilizzare il teorema di Reidemeister.

Abbiamo visto che $OO \not\sim \bigcirc$. Possiamo mostrare che due nodi non sono equivalenti?

3-colorabilità

Def.: $D \subset \mathbb{R}^2$ diagramma di un nodo in $\mathbb{R}^3$. D è *3-colorabile* se è possibile assegnare ad ogni suo arco uno dei 3-colori A, B, C in modo che:

- (a) vengano usati ≥ 2 colori distinti
- (b) intorno ad ogni incrocio compaiano 1 oppure 3 colori



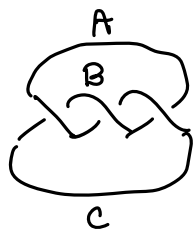
8

$$\{X, Y, Z\} = \{A, B, C\}.$$

Esempi:



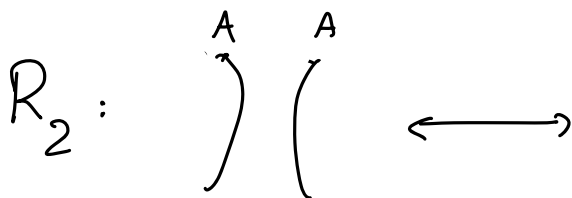
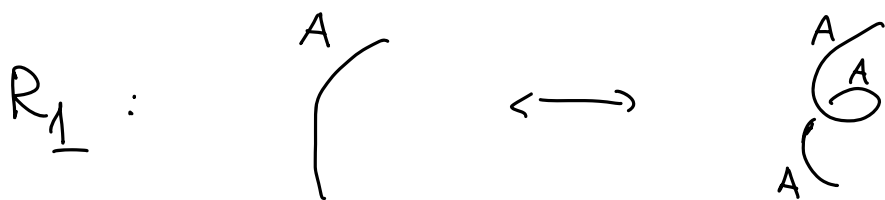
non è 3-colorabile perché ha un solo arco



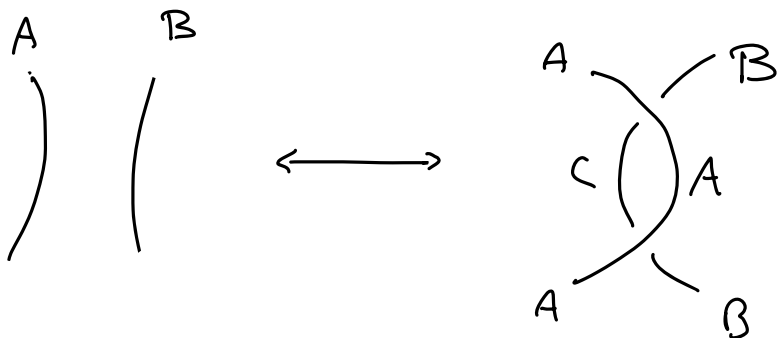
è 3-colorabile

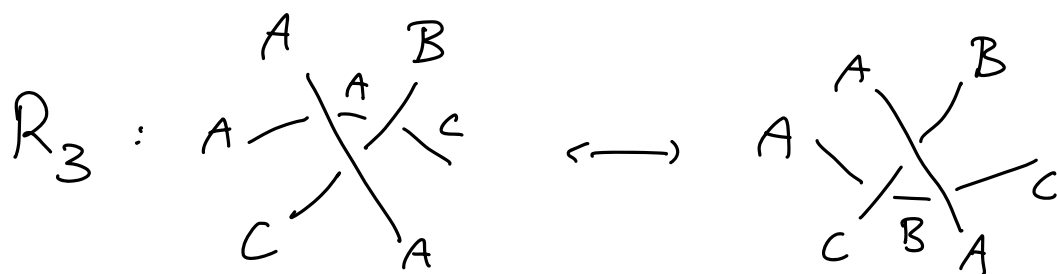
Teorema: Dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$, ogni diagramma oppure nessun diagramma di L è 3-colorabile.

Dim: la proprietà di 3-colorabilità è invariante per mosse di Reidemeister:



oppure





+ altri casi ...



Corollario :



dim. : il primo diagramma non è 3-colorabile,
il secondo sì. 

Usando i diagrammi è facile definire astrattamente
un invariante :

dato un link $L \subset \mathbb{R}^3$, il **crossing number** è
il minimo numero di incroci di un diagramma
di L .

Non è facile, però, calcolare il crossing number.

Un altro invariante abbastanza facile da
definire ma non facile da calcolare è
il **unlinking number** (numero di slacciamento).

Per definire l'unlinking number (unknotting number per un nodo) bisogna dimostrare il seguente fatto:

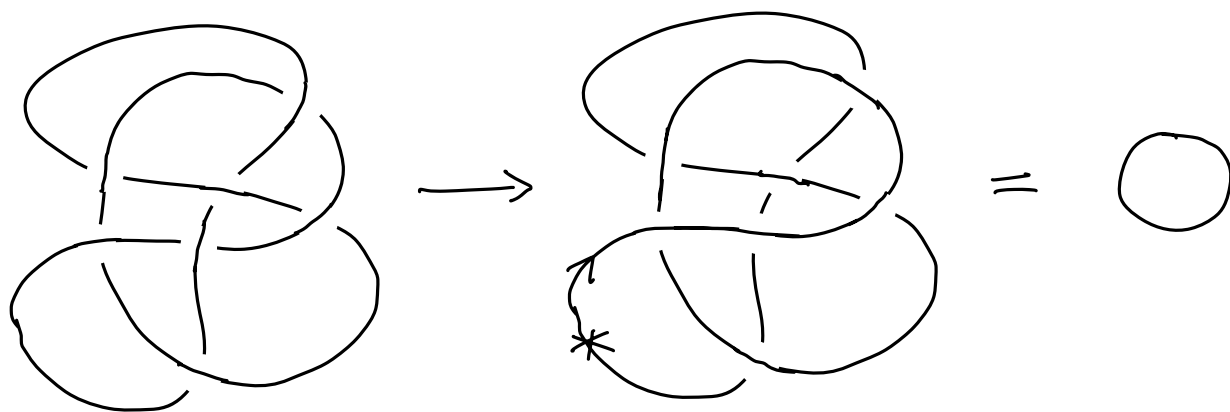
Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un diagramma di un link. Allora, scambiando alcuni incroci di D si ottiene il diagramma del link banale $O \dots O$.

(1)

Per definire l'unlinking number (unknotting number per un nodo) bisogna dimostrare il seguente fatto:

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un diagramma di un link. Allora, scambiando alcuni incroci di D si ottiene il diagramma del link banale $O \dots O$.

Idea della dimostrazione



dimostrazione Supponiamo prima $D =$ diagramma di un nodo. Visto D come curva regolare in $\mathbb{R}^2$, sia

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \quad ,$$

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi)$$

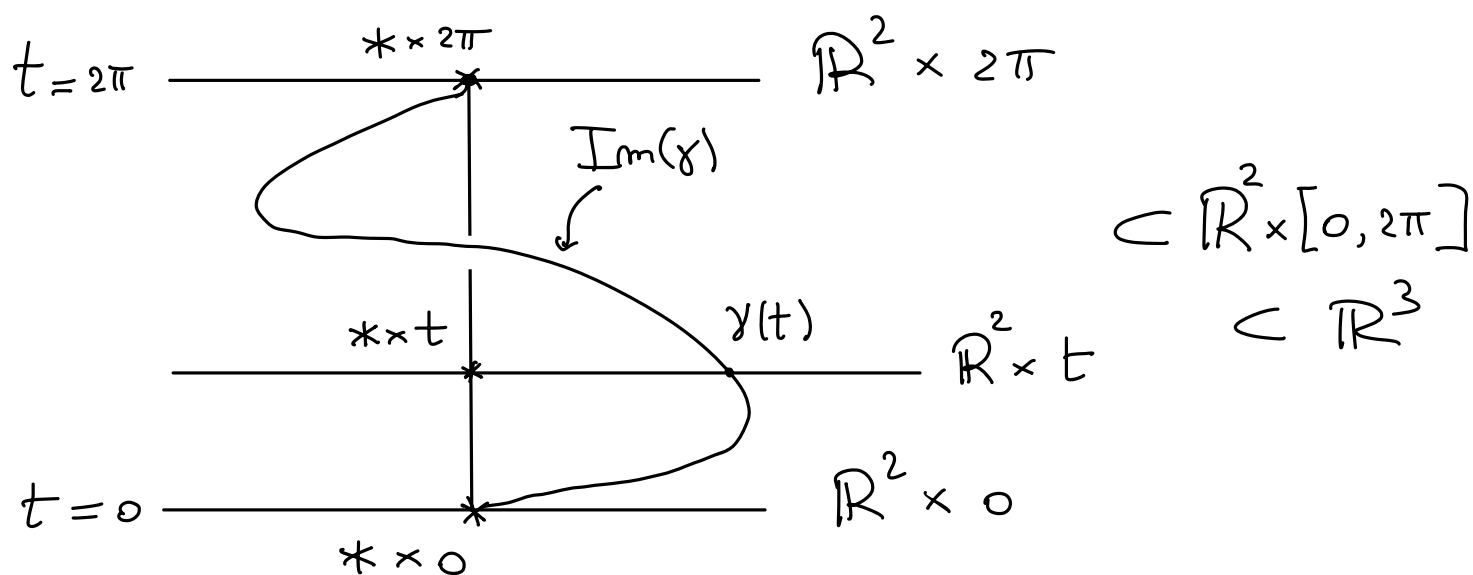
una sua parametrizzazione.

(2)

Definiamo $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), t), \quad * \in D \setminus \{\text{incroci}\}$$

Consideriamo l'unione $K = \text{Im}(\gamma) \cup * \times [0, 2\pi]$:



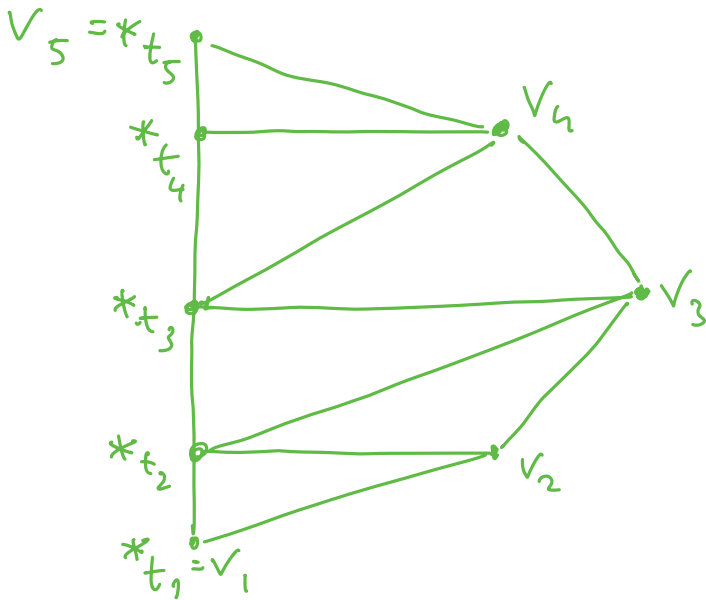
K è un modo banale, perché è il bordo del disco

$$\mathcal{L} = \bigcup_{t \in [0, 2\pi]} \overbrace{*_t \gamma(t)}^{\text{segmento da } * \times t =: *_t \text{ a } \gamma(t) \text{ in } \mathbb{R}^2 \times t}$$

Più formalmente: possiamo supporre γ poligonale

e che $|t_i| = v_i$, $i = 1, \dots, K$, siano i vertici.

Allora $\partial D = \partial(\text{unione di triangoli})$:



$\Rightarrow K$ collegato
al nodo base
da Δ -mosse

Dopo una perturbazione del segmento verticale $* \times [0, 2\pi]$ si ottiene un diagramma D' isotopo a D a meno di scambi di incroci.

Questo dimostra la tesi per un nodo. Per un link è sufficiente applicare lo stesso procedimento una componente alla volta, avendo cura di posizionare le componenti, dopo averle ordinate, "via via più in alto".



(4)

Dato un diagramma $D \subset \mathbb{R}^2$, possiamo definire

$u(D) :=$ minimo numero di incroci di D

sceambiando i quali si ottiene
un diagramma del link K banale.

e dato $L \subseteq \mathbb{R}^3$,

$u(L) := \min \{ u(D) \mid D = \text{diagramma di } L \}$

è l'unlinking (unknotting) number di L .

È naturale porsi la seguente domanda:

Se D_1, D_2 sono diagrammi di nodi

Reidemeister equivalenti, allora è
vero che gli unknotting number $u(D_1)$
e $u(D_2)$ sono uguali?

In realtà questa domanda è stato un
problema aperto fino agli inizi degli anni
'80, quando Bleiler e Nakanishi hanno
dimostrato [vedere Cromwell, § 3.7] che :

1) Scambiando i due incroci indicati del diagramma



si ottiene un diagramma del nodo bande;

2) Nessuno scambio di due incroci del diagramma Reidemeister- equivalente



Fino alla scoperta di questo esempio era stato congetturato che $u(K)$ si potesse calcolare da un diagramma di K con il minimo numero possibile di incroci.

(D_2 ha 10 incroci, D_1 14)

(6)

Fa comodo, a volte, definire un nodo
come l'immagine di una funzione C^∞

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(t+\tau) = f(t) \forall t$,
per qualche $\tau > 0$. Questo equivale a $S^1 \xrightarrow{\text{embedding } C^\infty} \mathbb{R}^3$

FATTO 1: l'immagine di una funzione C^∞
periodica è un nodo equivalente ad un
nodo poligonale. Due "nodi C^∞ " $f_0(s), f_1(s)$
sono equivalenti $\Leftrightarrow f_0, f_1$ sono C^∞ -isotopi.

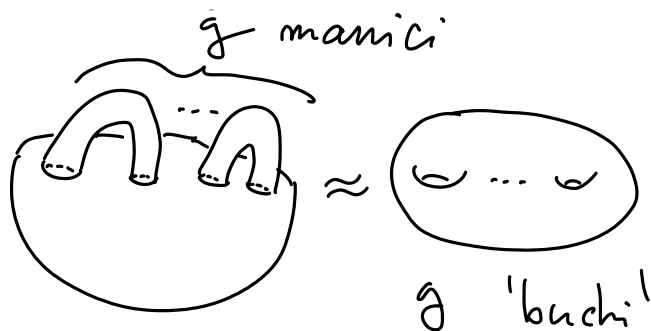
FATTO 2: ogni nodo poligonale è equivalente
all'immagine di una funzione C^∞ periodica.

Superfici orientabili chiuse

$$\{S_g\}_{g \geq 0}$$

g genere

S_g :



FATTO1: ogni varietà orientabile, chiusa (= compatta, senza bordo) di dimensione due è omeomorfa a S_g per qualche g .
 $S_g \neq S_{g'}$ se $g \neq g'$.

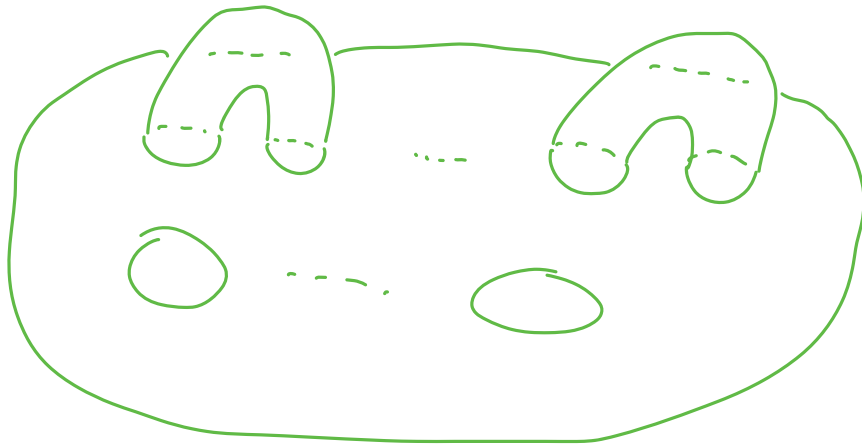
FATTO2: ogni S_g è triangolabile, cioè è omeomorfa ad un complesso simpliciale finito di dimensione due, ovvero uno spazio ottenuto come quoziente di un insieme finito di triangoli $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ identificando coppie di lati. Tale complesso simpliciale avrà un certo numero V di vertici, E di lati ed F di facce, e la caratteristica di Eulero $\chi(S_g) = E - V + F$ è uguale a $2 - 2g$.

FATTO3: Complessi simpliciali omotopicamente equivalenti hanno la stessa caratteristica di Eulero.

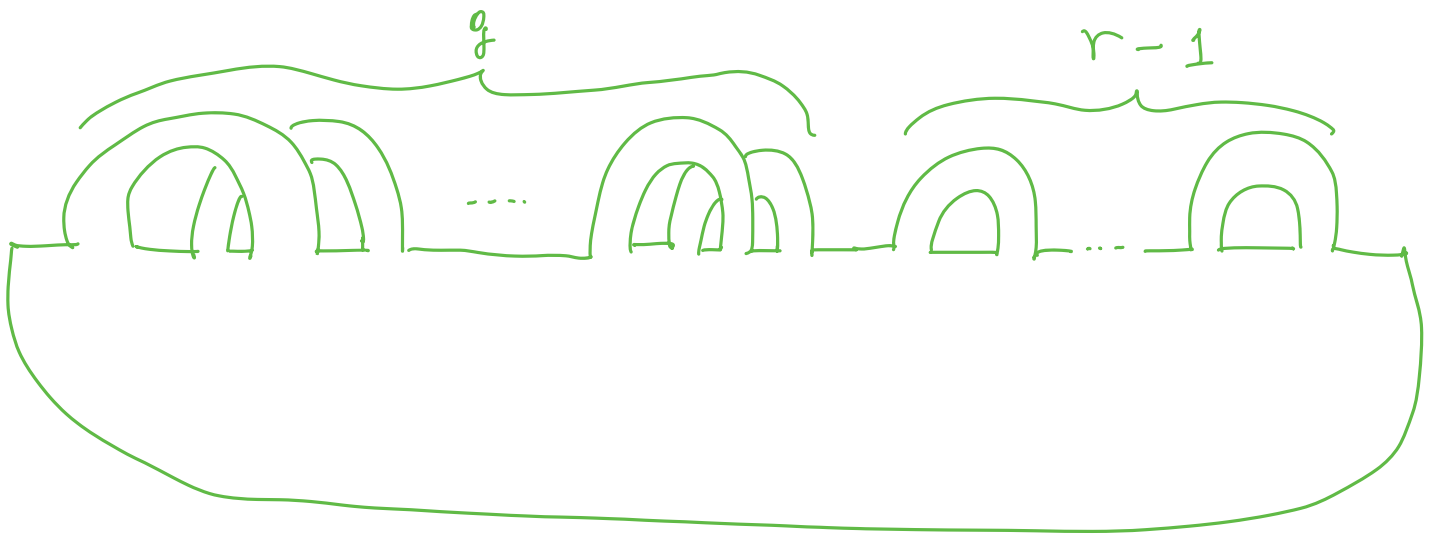
Superfici orientabili con bordo

$$\left\{ S_{g,r} := S_g \setminus r \text{ dischi aperti disgiunti} \right\}_{\substack{g \geq 0 \\ r \geq 0}}$$

$S_{g,r} =$



Fatto: $\forall r \geq 1$, $S_{g,r}$ è omeomorfa a:



Fatto: analogo a quello per le superfici chiuse, riguarda alle 2-varietà compatte, orientabili con bordo.

Fatto: $S_{g,r}$ è triangolabile e

$$\chi(S_{g,r}) = E - V + F = 2 - 2g - r$$

Diremo che un embedding $f: S_g \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ è localmente piatto se, per ogni

$p \in f(S_g)$ esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ di p

$$\text{t.c. } (U, U \cap f(S_g)) \approx (D^2 \times [-1, 1], D^2 \times 0)$$

Scriveremo $S_g \subset \mathbb{R}^3$ per indicare (l'immagine di) un embedding localmente piatto.

Fatto: a meno di isotopie ambientali gli embedding $S_g \subset \mathbb{R}^3$ localmente piatti sono le immagini di 2-varietà orientabili chiuse tramite embedding C^∞ .

Fatto: quanto detto sugli embedding di superfici chiuse vale, con ovvie modifiche, anche per superfici con bordo.

Proposizione: dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$,

esiste una superficie $S_{g,1} \subset \mathbb{R}^3$ con

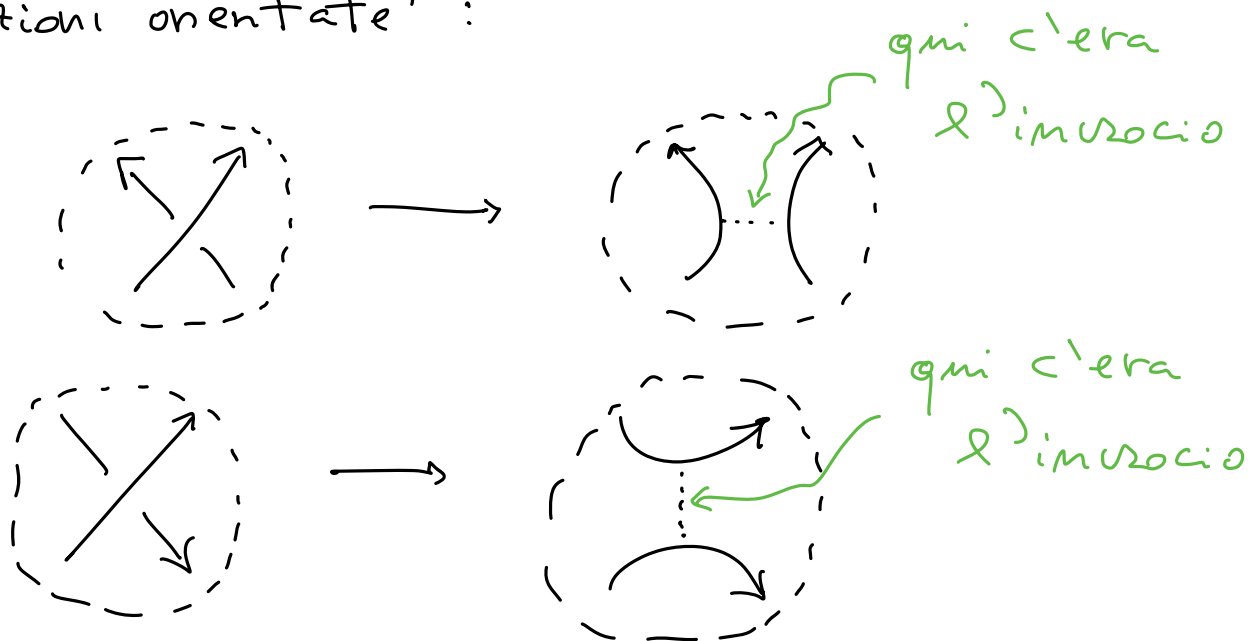
$$K = \partial S_{g,1}.$$

dim: (algoritmo di Seifert)

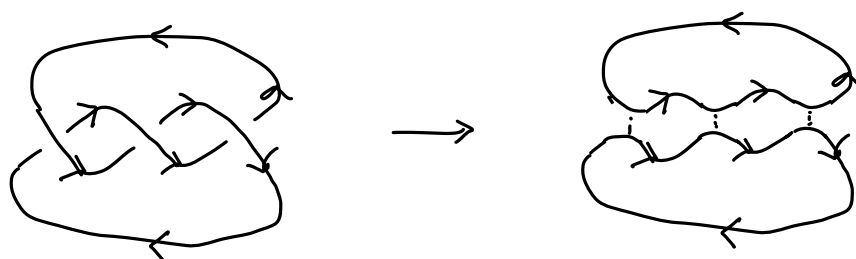
Fissiamo un'orientazione di K .

Sia $D \subset \mathbb{R}$ un diagramma orientato di K .

Intorno ad ogni incrocio applichiamo le 'risoluzioni orientate':



Esempio:



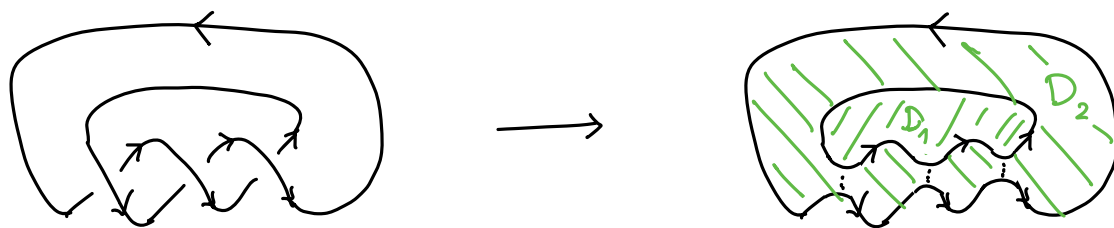
...continua]

①

Abbiamo ottenuto un'unione disgiunta di curve semplici chiuse orientate $c_i \subset \mathbb{R}^2$, dette **cicli di Seifert**.

Per il teorema di Jordan-Schoenflies in $\mathbb{R}^2$, ogni ciclo di Seifert c_i borda un disco $D_i \subset \mathbb{R}^2$.

Attenzione: non è detto che i dischi D_i siano disgiunti. Ad esempio:



Spostando verticalmente in $\mathbb{R}^3$ i dischi in $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ otteniamo un embedding in $\mathbb{R}^3$ di un'unione disgiunta di dischi $\tilde{D}_i \subset \mathbb{R}^3$, che si proiettano sui dischi $D_i \subset \mathbb{R}^2$: possiamo farlo in modo che se $\partial D_1 = c_1$, $\partial D_2 = c_2$ e

$c_2 \subset D_1$ allora $\tilde{D}_i \subset \mathbb{R}^2 \times a_i$, $i=1,2$,
con $a_2 > a_1$.

(2)

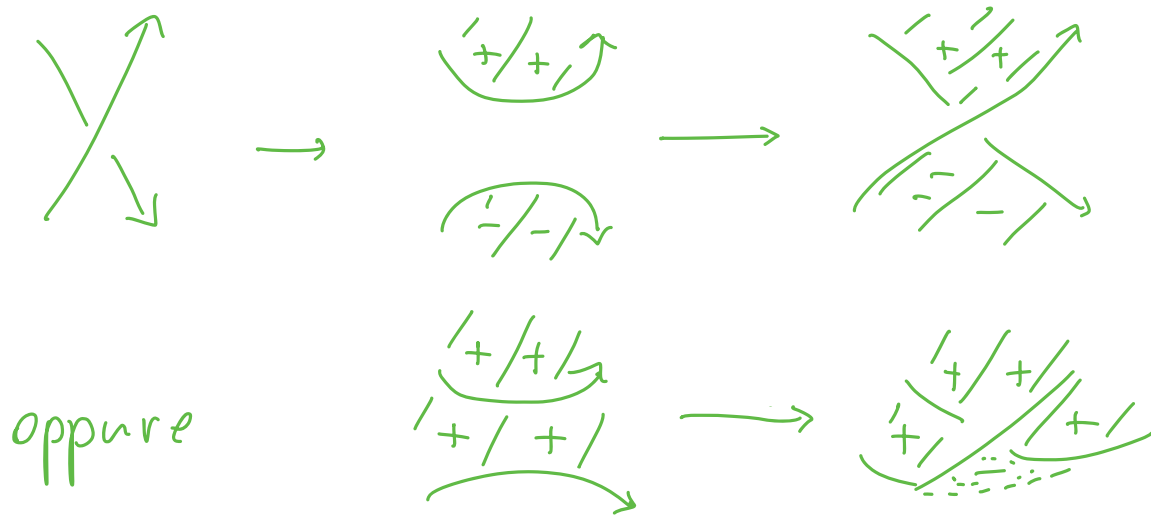
Osserviamo che le orientazioni sui cicli di Seifert C_i ne inducono sui dischi D_i e $\tilde{D}_i$, e che queste ultime possono coincidere o meno con le naturali orientazioni delle 'fette' $\mathbb{R}^2 \times \{a\}$:



Ora attachiamo bande ai dischi in modo da ottenere una superficie orientata:



Per un incrocio negativo :



Esempi :

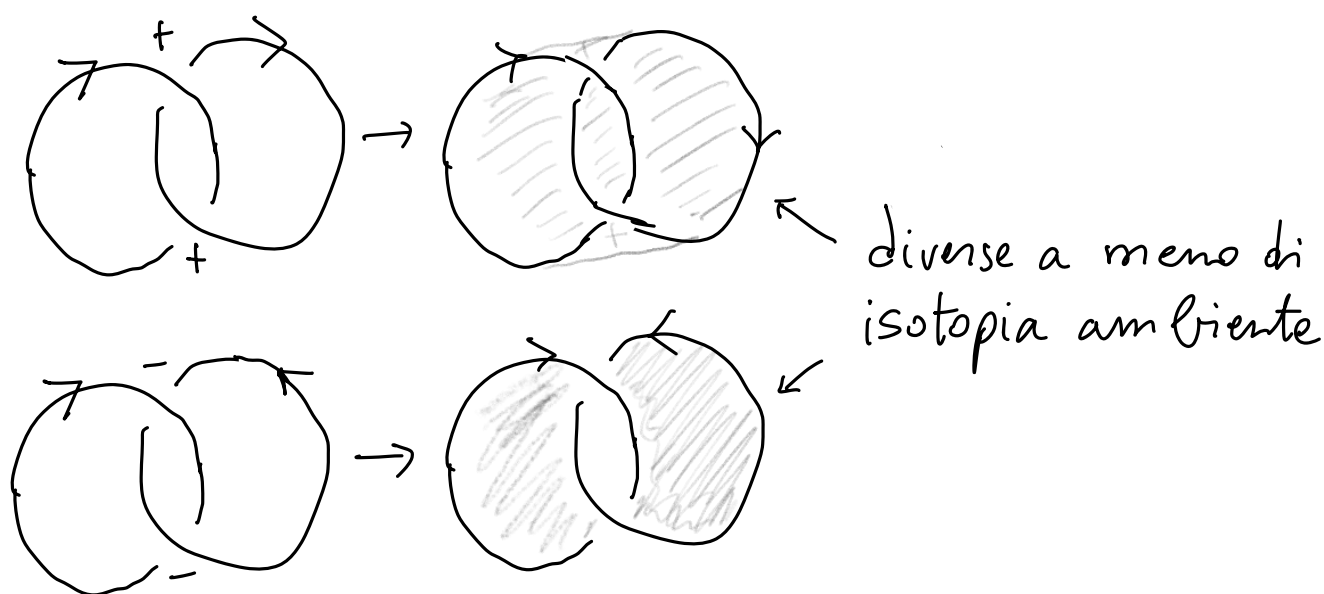


Poiché le bande sono attaccate in modo compatibile con le orientazioni, il risultato finale è una superficie orientata, embedded in $\mathbb{R}^3$ con bordo uguale a K (a meno di equivalenza). Inoltre, poiché ogni disco $\tilde{D}_i$ interseca il bordo, che è connesso, la superficie ottenuta è connessa.



Osservazione: l'algoritmo di Seifert

della dimostrazione della proposizione si può utilizzare senza modifiche per un link. Ma si può verificare tramite semplici esempi che, in generale, la superficie dipende dall'orientazione scelta (e in generale non è detto che risulti commesse):



Definizione: se $L \subset \mathbb{R}^3$ è un link ed $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile con $\partial S = L$, S si dice **superficie di Seifert** per L .

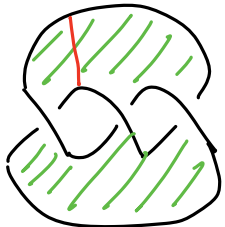
Definizione: dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, il **genere** di K è

$$g(K) := \min \{g \mid S_{g,1} \subset \mathbb{R}^3, \partial S_{g,1} = K\} \quad (5)$$

Fatto: un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$ è banale $\iff$
 $g(K) = 0$.

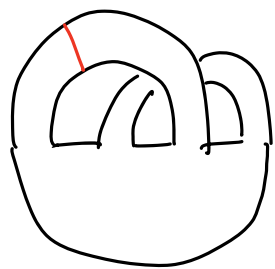
$\Gamma \Rightarrow$: facile; $\Leftarrow$: dipende dal fatto che
 dati due dischi embedded $D_1, D_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$,
 esiste sempre un'isotopia ambiente che
 manda uno nell'altro $\perp$.

Esempio: calcoliamo il genere del trifoglio

$T =$ . Sappiamo $T \neq \text{banale}$

$\Rightarrow g(T) > 0$. Applicando l'algoritmo

di Seifert si ottiene la superficie F
 tratteggiata. Tagliandola lungo l'arco
 rosso si ottiene una superficie omeomorfa
 ad un anello. Ma anche tagliando
 la superficie $S_{1,1}$:

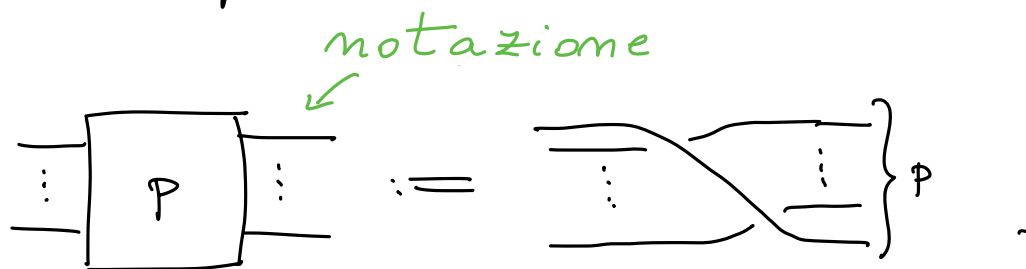


lungo l'arco rosso si ottiene
un anello. Quindi $S_{1,1} \approx F_1$,
dunque $g(T) \leq 1$, $\Rightarrow g(T) = 1$

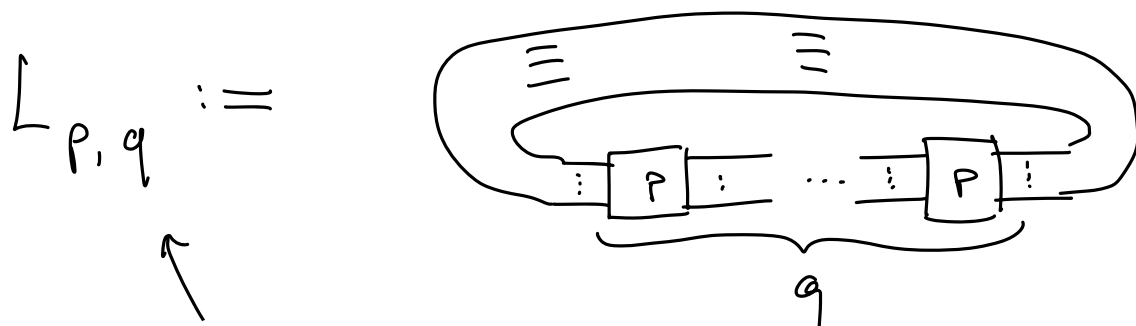
Domanda: $\{g(k) \in \mathbb{N} \mid k \subset \mathbb{R}^3 \text{ modo}\} = ?$

Esempi: link e nodi torici

Sia $p > 0$ un intero e



Dato $q > 0$ un altro intero,

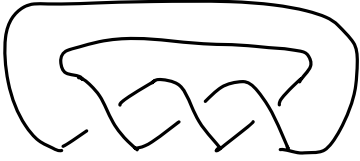


link torico di tipo (p, q)

Esercizio: $L_{p,q}$ è un nodo $\Leftrightarrow$

$$\text{m.c.d.}(p, q) = 1$$

È il nodo torico di tipo (p, q) ; notazione: $T_{p,q}$

Esempio: $T_{2,3} =$  $= \text{trifoglio}$

Fatto: $g(T_{p,q}) = (p-1)(q-1)/2$

$$\Rightarrow g(T_{2,2n+1}) = n.$$

Quest'ultimo fatto implica, in particolare, l'esistenza di infiniti nodi a due a due distinti.



Possiamo dimostrare che esistono nodi di qualunque genere senza prendere per buono il genere dei nodi torici. Per capire come, dobbiamo approfondire lo studio del genere.

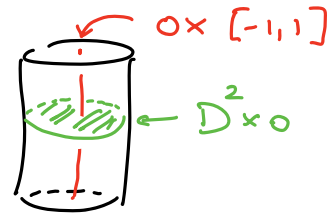
(8)

Dati un link L e una superficie S in $\mathbb{R}^3$,
diremo che $p \in L \cap S$ è un **punto di**
intersezione trasversa se esiste un intorno
 $U \subset \mathbb{R}^3$ e un omeo.

$$U \xrightarrow{\approx} D^2 \times [-1, 1] =$$

$$\text{con } U \cap S \xrightarrow{\approx} D^2 \times 0,$$

$$U \cap L \xrightarrow{\approx} 0 \times [-1, 1].$$

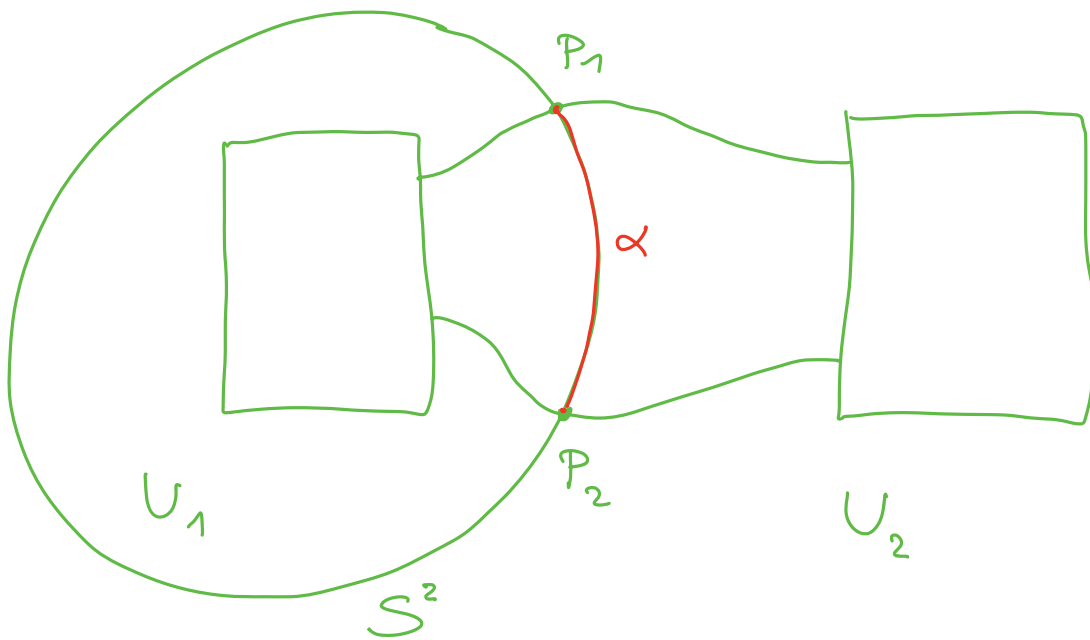


Teorema di Schoenflies in $\mathbb{R}^3$:

data una sfera (embedded) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$,
esiste un omeomorfismo isotopo all'identità
 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $h(S^2) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. $\square$

Ora supponiamo che $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sia una
sfera (embedded) ed $L \subset \mathbb{R}^3$ un link tali
che $S^2 \cap L = \{p_1, p_2\}$, con p_1, p_2
di intersezione trasversa.

Per il teorema di Schoenflies $\mathbb{R}^3 \setminus S^2 = U_1 \cup U_2$,
con $U_1 \approx B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\}$ 3-palla
aperta.



P_1 e P_2 sono collegati da un arco α , unico a meno di isotopia su S^2 ad estremi fissati. Quindi i link

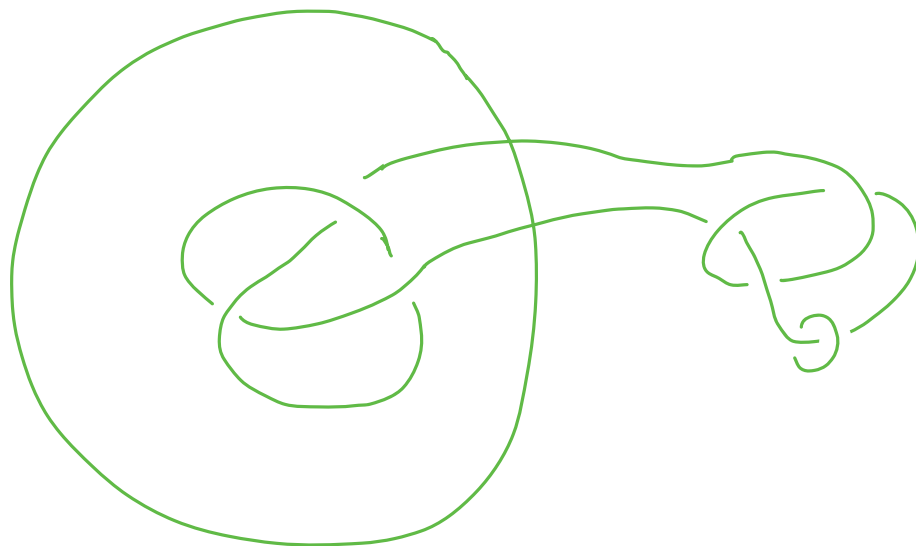
$$L_i := (L \cap U_i) \cup \alpha \subset \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2$$

sono ben definiti (a meno di equivalenza).

DEF: L_1 ed L_2 si dicono **fattori** di L (rispetto alle sfere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$) e si scrive

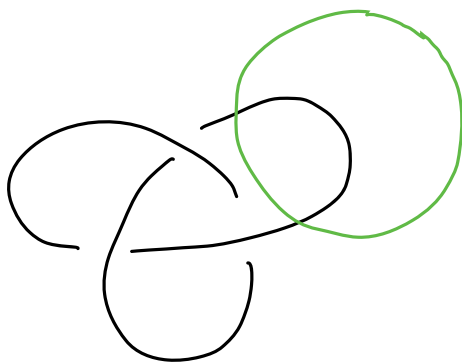
$$L = L_1 \# L_2 \leftarrow \text{fattorizzazione di } L$$

Esempio:



DEF. : $K \subset \mathbb{R}^3$ nodo non banale si dice **primo** se non ha **fattori propri** (ovvero diversi dal nodo banale o da K).

Esempio (fattorizzazione banale):



Chiamante, per ogni nodo $K \subset \mathbb{R}^3$ si ha

$$K = K \# U \quad \leftarrow \text{fattore banale}$$

Teorema: $K \in \mathbb{R}^3$ nodo, $K = K_1 \# K_2$
 $\Rightarrow g(K) = g(K_1) + g(K_2).$

Dimostrazione:

$\boxed{\Leftarrow}$: Costruiamo una superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$ di genere $g(K_1) + g(K_2)$.

Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ una sfera che induce la fattorizzazione. Allora

$$\mathbb{R}^3 \setminus S^2 = B_1 \cup B_2,$$

$$\text{con } B_1 \approx \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\} \text{ e}$$

$$B_2 \approx \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| > 1\}.$$

Per costruzione possiamo supporre $K_i \subset B_i$, $i = 1, 2$. B_1 è omeomorfa ad $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccccc} B_1 & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\approx} & B_1 \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-\|x\|} & y & \longmapsto & \frac{y}{1+\|y\|} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ sup. di Seifert minimale per K_1 $F_1 \subset B_1$.

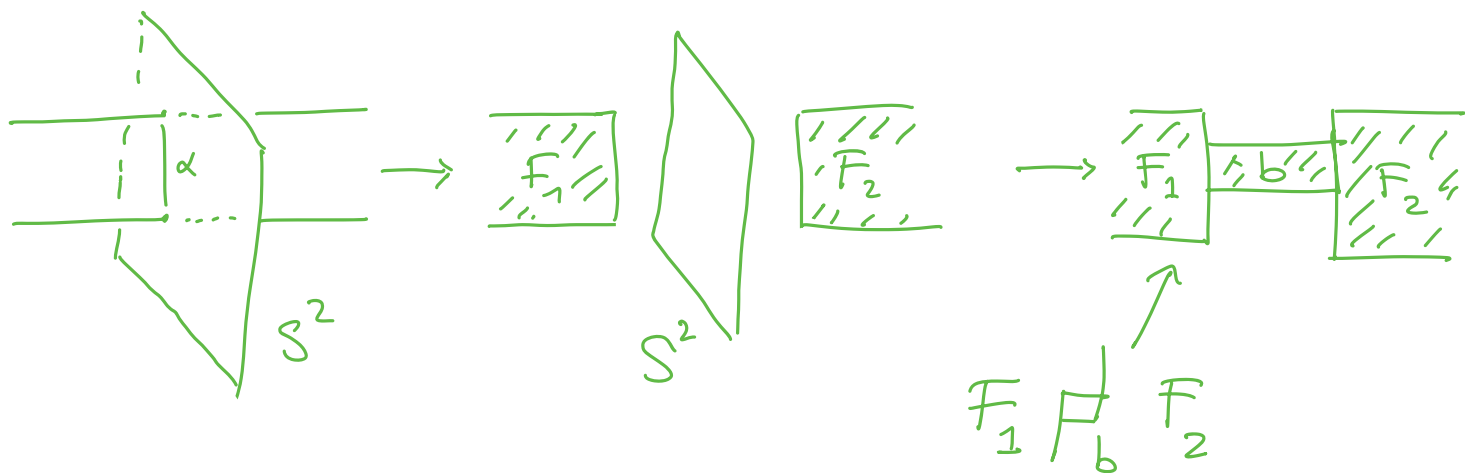
Tramite proiezione stereografica (ad esempio) si vede che c'è un omeomorfismo

$$B_2 \approx \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

⇒ a meno di applicare un'isotopia per evitare il punto 0 , si trova una superficie di Seifert minimale $F_2 \subset B_2$ con $\partial F_2 = K_2$.

(2)

Ora possiamo costruire una superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$ attaccando una banda b ad $F_1 \sqcup F_2$ come in figura:



Posso attaccare b in modo che

$F := F_1 \#_b F_2$ risulti orientabile.

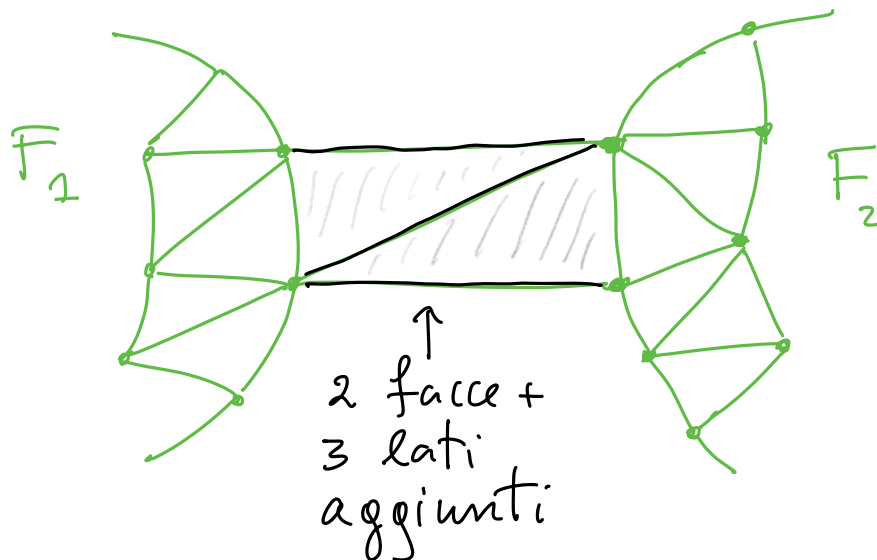
Quindi $g(K_1 \# K_2) \leq g(F)$.

Per calcolare $g(F)$ possiamo triangolare.

F_1, F_2 e, a meno di raffinare la triangolazione,

possiamo estenderle a b in questo modo:

(3)



Allora

$$\chi(F) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - 3 + 2$$

$$1 - 2g(F) \quad 1 - 2g(K_1) \quad 1 - 2g(F_2)$$

$$\Leftrightarrow g(F) = g(K_1) + g(K_2)$$

$$\Rightarrow g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2).$$

$\geq$:

Idea: si parte da una superficie di Seifert F di genere minimo per K e si modifica in un'altra superficie di Seifert F' dello stesso genere e tale che $F' \approx F_1 \# F_2$, dove F_i = superficie di Seifert per K_i , $i = 1, 2$.

Questo conclude la dimostrazione:

$$g(K) = g(F) = g(F') = g(F_1) + g(F_2) \geq g(K_1) + g(K_2).$$

$K_1 \# K_2$

Idea per la modifica $F \rightarrow F'$:

Semplificare l'intersezione $F \cap S^2$,
dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è una sfera che
induce la decomposizione $K = K_1 \# K_2$.

Supponiamo F ed S come sopra.
Useremo il seguente

Fatto (posizione generale):

a meno di applicare un'isotopia di S ,
si può supporre che $S \cap F$ sia "generica",
ovvero che

$$S \cap F = \left\{ \text{arco } \alpha \text{ che connette i due} \right\} \amalg$$

punti di $S \cap K$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unione disgiunta di n.ro finito di} \\ \text{curve semplici chiuse } C_i \end{array} \right\}$$

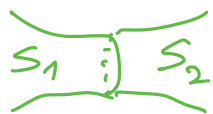
FATTO:

⑤

Ogni $C_i \subset S$ ha un intorno A_i in S omeomorfo ad un anello $S' \times [0,1]$.

Ragionando con delle triangolazioni adattate (esercizio facile):

$$S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 \approx S' \Rightarrow \chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$$



Si possono scegliere triangolazioni di S_1, S_2 che coincidono su $S_1 \cap S_2$ (fatto) e $\chi(S') = 0$

$$2 = \chi(S) = \chi\left(S \setminus \bigsqcup_i A_i\right) + \chi\left(\bigsqcup_i A_i\right)$$

Sia $F_{g,r} \subset S \setminus \bigsqcup_i A_i$ una $\sum_i \chi(A_i) = 0$
componente connessa. Ogni curva
semplice chiusa in $F_{g,r}$ è separante

perché lo è in S . Ma se fosse $g > 0$
sarebbe facile trovare curve non
separanti:



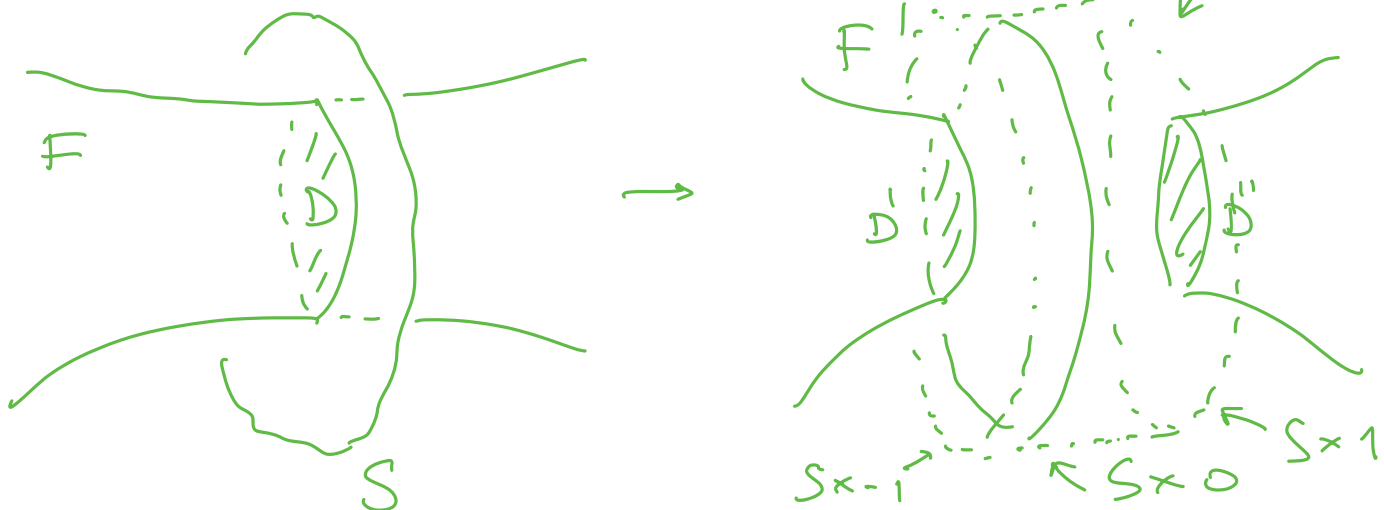
Quindi $g = 0$ e $\chi(F_{0,r}) = 2 - r$.

$r > 0$ per costruzione $\Rightarrow X(F_{0,r}) \leq 1$ e ⑥
 vale " $=$ " $\Leftrightarrow F_{0,r} = \text{disco}$. Ma
 $X(S \setminus \bigcup_i A_i) = 2$ è somma delle
 caratteristiche di Eulero delle componenti
 connesse, quindi $S \setminus \bigcup_i A_i$ deve contenere
 almeno due dischi.

Fatto: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie chiusa, orientabile $\Rightarrow S$ ha
 intorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ con omeo. $U \xrightarrow{\cong} S \times [-1,1]$
 $\begin{matrix} \cup \\ S \end{matrix} \leftrightarrow S \times 0$

Sia $D \subset S \setminus \bigcup_i A_i$ un disco
 che non contiene l'arco α .

Facciamo "chirurgia" lungo D $U \cong S \times [-1,1]$



$A \subset F$ anello intorno a $\partial D = D \cap F$
 $\Rightarrow F' := (F \setminus \overset{\circ}{A}) \cup D' \cup D''$
 $\partial A = \partial D' \cup \partial D''$

Ora $F' \cap S$ ha una componente C_i in meno.

⑦

• Mostriamo che F' non può essere connessa.

Per assurdo, F' connessa $\Rightarrow$

$$1 - 2g(F') = \chi(F') = \chi(F) + 2 \\ = 1 - 2g(F) + 2$$

$$\Rightarrow g(F) = g(F') + 1.$$

Questo è assurdo, perché F è di genere minimale per K .

$$\text{Quindi } F' = F'_1 \sqcup F'_2,$$

con $K = \partial F'_1$ e F'_2 chiusa. Allora

$$\chi(F'_1) + \chi(F'_2) = \chi(F') = \chi(F) + 2$$

$$\partial F'_1 = K = K_1 \# K_2 \Rightarrow g(F) = g(K) \leq g(F'_1)$$

$$\Rightarrow \chi(F'_1) = 1 - 2g(F'_1) \leq \chi(F)$$

$$\Rightarrow \chi(F'_2) \geq 2. \quad \text{Poiché } F'_2 \text{ è chiusa,}$$

è una sfera e $\chi(F'_2) = 2$. Quindi (8)

$$\chi(F'_1) = \chi(F) \text{ e } g(F'_1) = g(F) = g(K).$$

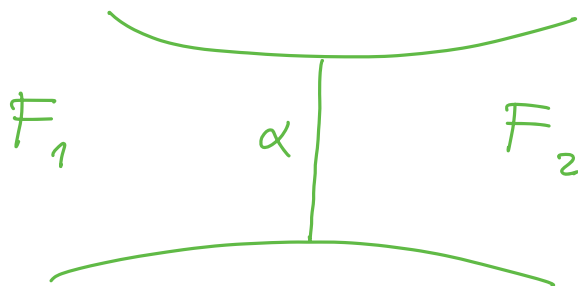
Inoltre, $F'_1 \cap S$ ha una componente

C_i in meno rispetto a $F \cap S$.

Continuando nello stesso modo a partire da F'_1 , dopo un n.ro finito di chirurgie si ottiene una superficie di Seifert F' per K t.c. $g(F') = g(K)$,

$F' \cap S = \alpha$ arco α congiungente i due punti di $S \cap K$.

intorno di α
in F' :



$$\Rightarrow F' = F_1 \sqcup F_2 \text{ con } \partial F_i = K_i,$$

$F_i = \text{Superficie di Seifert per } K_i$ □

Implicazioni dell'additività del genere

9

Corollario 1: U modo banale,

$$U = K_1 \# K_2 \Rightarrow K_1 = K_2 = U$$

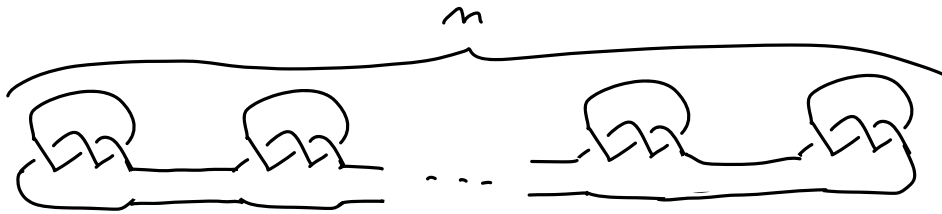
dim.: per il teorema

$$0 = g(U) = g(K_1) + g(K_2) \Rightarrow$$

$$g(K_1) = g(K_2) = 0 \Rightarrow K_1 = K_2 = U$$



Corollario 2: Sia $K_n \subset \mathbb{R}^3$, $n \geq 1$, il modo dato dal diagramma:



Allora $g(K_n) = n$ e quindi $K_n \neq K_m$ per $n \neq m$.

dim: $T = \text{trifoglio}$, $K_1 := T$,
 $K_n := T \# K_{n-1} \quad \forall n \geq 2$,

$$g(T) = 1, \quad g(K_n) = g(T) + g(K_{n-1}) \Rightarrow g(K_n) = n.$$



già vista

DEF: $K = \text{nodo in } \mathbb{R}^3$ si dice **primo**
 se $K \neq U = \text{nodo banale}$ e

$$K = K_1 \# K_2 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = U, K_2 = K, \text{ oppure} \\ K_1 = K, K_2 = U \end{cases}$$

Se K non è primo si dice **decomponibile**.

già vista

DEF: $K = \text{nodo in } \mathbb{R}^3$ si dice **primo**
se $K \neq U = \text{nodo banale}$ e

$$K = K_1 \# K_2 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = U, K_2 = K, \text{ oppure} \\ K_1 = K, K_2 = U \end{cases}$$

Se K non è primo si dice **decomponibile**.

Discussione: sia $K \subset \mathbb{R}^3$ nodo
decomponibile. Allora esiste una
sfera "separante" $S \subset \mathbb{R}^3$, con
 $K \cap S = \{2 \text{ punti trasversi}\}$ e
decomposizione risultante:

$$K = K_1 \# K_2,$$

con $g(K_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2$. Quindi

$$g(K) = g(K_1) + g(K_2) \Rightarrow g(K_i) < g(K)$$

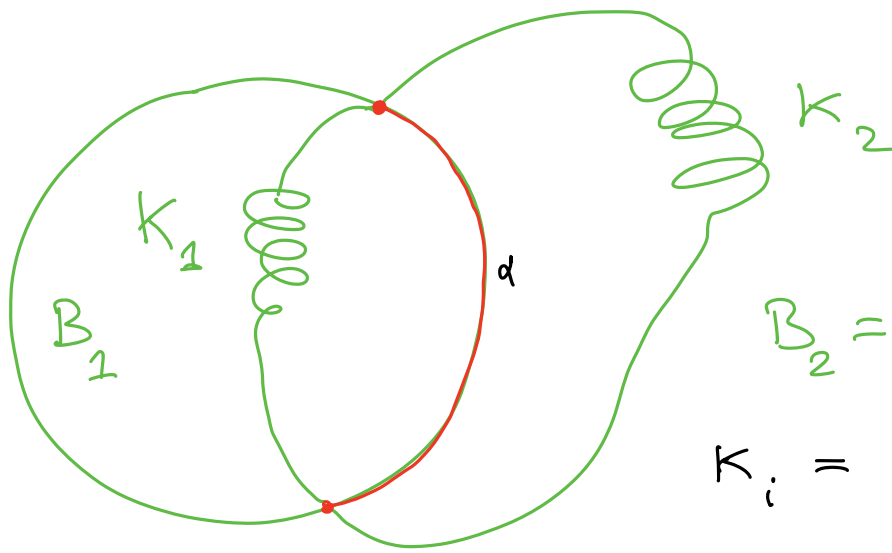
per $i = 1, 2$.

$$S \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

$$\Rightarrow S^3 \setminus S = B_1 \cup B_2 \text{ unione}$$

disgiunta di due 3-palle.

(2)

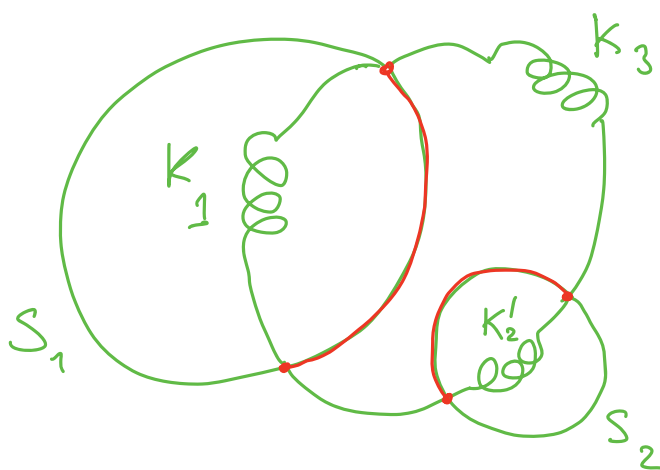


$$B_2 = S^3 \setminus \overset{\circ}{B}_1$$

$$K_i = \overline{B_i \cap K} := (B_i \cap K) \cup d$$

$K_2 \subset B_2 \approx \mathbb{R}^3$. Se è decomponibile, esiste una sfera $S_2 \subset B_2$ separante per K_2 e una decomposizione

$$K_2 = K'_2 \# K_3 \quad \text{con}$$



K'_2, K_3 non
triviali.

La stessa cosa si può fare con K_1 se è decomponibile. I generi continuano a diminuire finché continuiamo ad

ottenersi modi decomponibili.

(3)

Precisazione: a rigore, i nodi ottenuti sono a volte contenuti in regioni del tipo

$$R = 3\text{-palla} \setminus \{\text{unione finita di palle disgiunte}\}.$$

Se un nodo $K \subset R$ è decomponibile nella 3-palla che contiene R , lo è in R perché dopo una piccola isotopia una sfera separante per K evita i centri delle palle $\Rightarrow$ dopo altre isotopia è contenuta in R .

Supponendo di aver decomposto K m volte, avremo m sfere $S_1, \dots, S_m \subset S^3$, inscatolate in qualche modo, con

$$S^3 \setminus \bigcup_{i=1}^m S_i = R_1 \cup \dots \cup R_{m+1}$$

ogni sfera
è separante

Fissiamo archi $\alpha_i \subset S_i$ che congiungono i due punti $K \cap S_i$, e poniamo

$$K_j := (K \cap R_j) \cup \{\alpha_i \mid S_i \subset \partial R_j\}$$

Notazione: $K_j := \overline{K \cap R_j}$ (chiusura di $K \cap R_j$)

Continuando a decomporre si arriva ad un insieme finito $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ di sfere disgiunte tale che:

- $K \cap S_i = 2$ punti trasversi, $i=1, \dots, m$
- K_j primo $\forall j=1, \dots, m+1$.

Questo $\mathcal{S}$ è un

sistema di sfere separanti (SSS),
scriveremo

$$K = K_1 \# \dots \# K_{m+1}$$

I nodi K_j si dicono **fattori primi** di K . Questa terminologia suggerisce un'analogia con la fattorizzazione in primi dei numeri naturali (anche se non abbiamo definito un prodotto - ne ripareremo).

Teorema (Schubert): $K \subset S^3$ nodo, se

$$K = K_1 \# \dots \# K_n = K'_1 \# \dots \# K'_m \Rightarrow n=m, \\ K_i = K'_{\sigma(i)}, \text{ per qualche } \sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ permutazione.}$$

Linea delle dimostrazione del teo. di Schubert (5)

Chiamo **equivalenti** due SSS $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ per K che determinano gli stessi fattori primi a meno di permutazioni. Scriveremo $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$.

Per dimostrare il Teorema bisogna far vedere che due qualsiasi SSS per K sono equivalenti.

Dati $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ SSS per K , si fa induzione su $M = |\mathcal{S}| + |\mathcal{S}'| = \text{n.ro totale di sfere}$. K decomp. $|\mathcal{S}|, |\mathcal{S}'| \geq 1 \Rightarrow M \geq 2$.

Sia $S \subset \mathcal{S}$ minimale: $S = \partial B$, $B = \text{palla}$, $B \cap \mathcal{S} = \emptyset$

Lemma 1 $\exists$ SSS $\mathcal{S}'' \sim \mathcal{S}'$ con $\mathcal{S}'' \cap B = \emptyset$. $\square$

Sia $S'' \subset S^3 \setminus B$, $S'' \in \mathcal{S}''$, sfere massimale.

Lemma 2 $\mathcal{S}''' := (\mathcal{S}'' \setminus S'') \cup \{S\} \Rightarrow$

$\mathcal{S}''' \text{ SSS, } \mathcal{S}''' \sim \mathcal{S}''$. $\square$

Ora $\mathcal{S}, \mathcal{S}'''$ condividono la sfera $S = \partial B$ e sono disgiunti da B . Vogliamo dimostrare: $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'''$

Inoltre,

$$K = \overline{K \cap B} \# \hat{K}, \quad \hat{K} = \overline{K \cap (S^3 \setminus B)} \quad (6)$$

$$M=2 \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}''' \checkmark \quad M > 2 \Rightarrow$$

$$\hat{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \setminus \{S\}, \quad \hat{\mathcal{S}}''' := \mathcal{S}''' \setminus \{S\}$$

sono SSS per $\hat{K}$, e $|\hat{\mathcal{S}}| + |\hat{\mathcal{S}}'''| < M$.

per ipotesi induttiva $\hat{\mathcal{S}} \sim \hat{\mathcal{S}}''' \Rightarrow$ inducono la stessa decomposizione a meno di una permutazione:

$$\hat{K} = \hat{K}_1 \# \dots \# \hat{K}_m$$

$\Rightarrow \mathcal{S}, \mathcal{S}'''$ inducono la stessa decomposizione a meno di una permutazione:

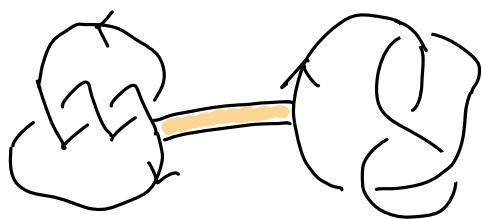
$$K = \hat{K}_1 \# \dots \# \hat{K}_m \# \overline{K \cap B}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} \sim \mathcal{S}''' \sim \mathcal{S}'' \sim \mathcal{S}' \quad \square$$

Osservazione: la notazione " $K_1 \# K_2$ " non vuole suggerire l'esistenza di un'operazione algebrica sull'insieme dei nodi, sebbene sia possibile definire un'operazione dopo opportune precisazioni.

Dati due nodi orientati K_1 e K_2 , la somma commessa di K_1 e K_2 si può definire aggiungendo all'unione disgiunta (*) di due diagrammi orientati una banda planare compatibile con le orientazioni.

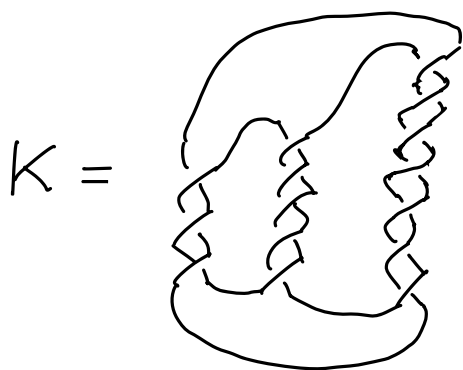
Esempio:



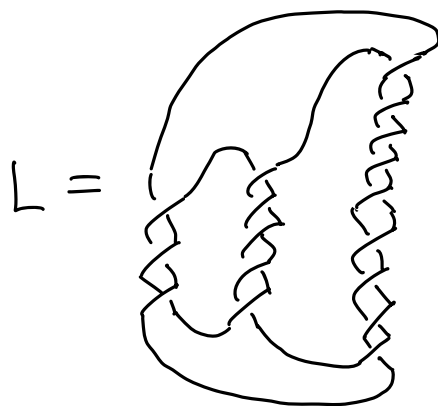
(*) K_1 e K_2 sono contenuti in palle disgiunte.

Si dimostra che in questo modo l'insieme dei nodi orientati può essere dotato di una struttura di monoidi commutativo (l'unità è il nodo banda).

D'altra parte, non è possibile definire un'operazione in questo modo sull'insieme dei nodi non orientati. Infatti, siano



"
 $P(3, 5, 7)$



"
 $P(3, 5, 9)$

← notazione →
per i nodi "pretzel"

Allore, posto

$K_{\pm}, L_{\pm}$ = i nodi K ed L dotati delle due possibili orientazioni, e

$$M_{++} := K_+ \# L_+, \quad M_{--} := K_- \# L_-,$$

$$M_{+-} := K_+ \# L_-, \quad M_{-+} := K_- \# L_+,$$

si dimostra che:

- $M_{++}, M_{--}, M_{+-}, M_{-+}$ sono a due a due distinti come nodi orientati
- $M_{++} \sim M_{--}$ e $M_{+-} \sim M_{-+}$ come nodi non orientati (ovvio)
- M_{++} e M_{+-} sono distinti come nodi non orientati.

Torniamo al numero di allacciamento:

$$L = \alpha \cup \beta \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

link orientato a 2 componenti.

○

$D_\alpha, D_\beta \subset \mathbb{R}^2$ diagrammi orientati
di α, β .

$$\Rightarrow \text{lk}(L) := \frac{1}{2} \sum_{c \in D_\alpha \cap D_\beta} \varepsilon(c).$$

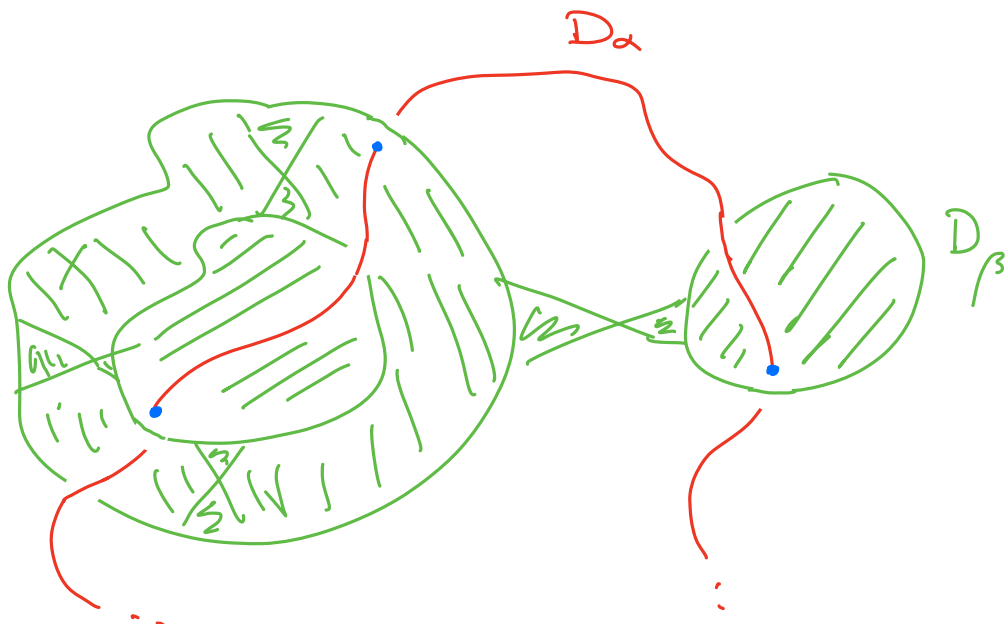
$$D_\alpha \cap D_\beta = \left\{ c \mid \beta \text{ sovrappassa} \right\} \cup \left\{ c \mid \alpha \text{ sovrappassa} \right\}$$

$\parallel$
 $\ddots$
 A

$\parallel$
 $\ddots$
 B

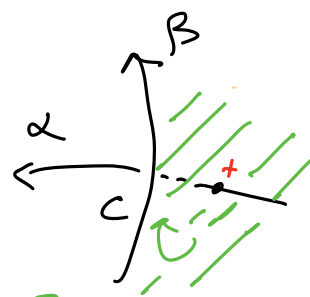
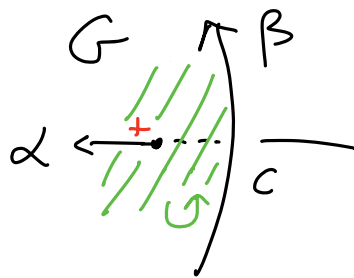
$G :=$ superficie F_{D_β} ottenuta da D_β tramite
l'algoritmo di Seifert.

A meno di isotopia possiamo fare in modo che
 $\alpha \cap G =$ n.ro finito di punti di intersezione
trasversi, ciascuno dei quali
vicino ad un incrocio $c \in D_\alpha \cap D_\beta$:



Se:

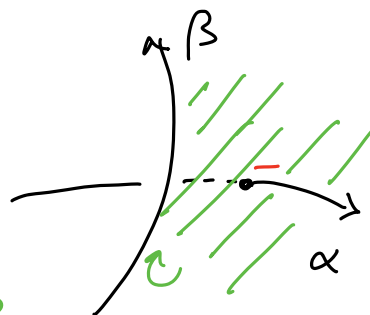
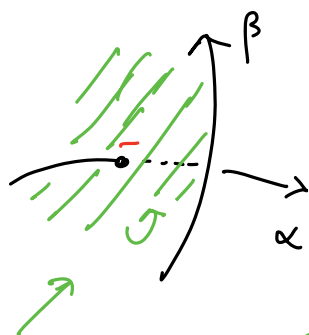
$$c \in A, \\ \varepsilon = +1$$



①

casi possibili

se $c \in A,$
 $\varepsilon = -1$



casi possibili.

$$\Rightarrow \sum_{c \in A} \varepsilon(c) = \# (\alpha \cap G) = \text{n.ro}$$

algebrico di intersezione

tra α e G , ottenuto sommando

i segni delle intersezioni ottenuti tenendo conto delle orientazioni di α e G .

Nello stesso modo: $\sum_{c \in B} \varepsilon(c) = \# (\beta \cap F),$

con $F = F_{D_\alpha}$ superficie ottenuta da D_α tramite

l'algoritmo di Seifert.

Avevamo concluso:

(2)

$$lk(L) = \frac{1}{2} \left(\#(\partial F \cap G) + \#(\partial G \cap F) \right)$$

Vogliamo verificare che $\#(\partial F \cap G)$ e $\#(\partial G \cap F)$ sono uguali.

Siano $F = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i^{(1)}$, $G = \bigcup_{j=1}^m \Delta_j^{(2)}$

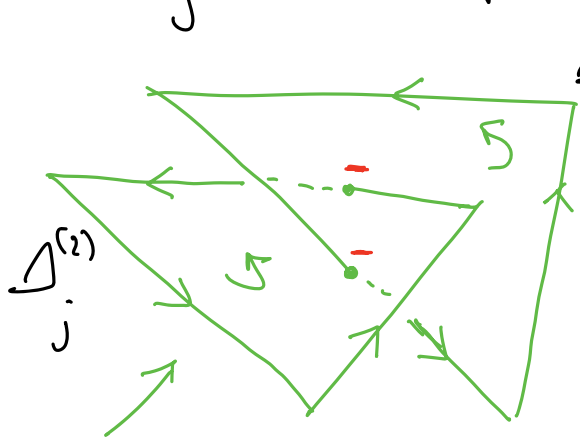
triangolazioni di F e G . A meno di isotopia e raffinamento delle triangolazioni, possiamo supporre che $\forall i, j$

Se $\Delta_i^{(1)} \cap \Delta_j^{(2)} \neq \emptyset$ allora

$\partial \Delta_i^{(1)} \cap \Delta_j^{(2)} = 1$ punto interno trasverso,

$\Delta_i^{(1)} \cap \partial \Delta_j^{(2)} = 1$ punto interno trasverso.

Cioè:



$$\begin{aligned} \Rightarrow \# \Delta_i^{(1)} \cap \partial \Delta_j^{(2)} \\ \parallel \\ \# \partial \Delta_i^{(1)} \cap \Delta_j^{(2)} \end{aligned}$$

caso di intersezione negativa.
L'altro caso è simile

Allora possiamo calcolare:

(3)

$$\begin{aligned}\#(F \cap \partial G) &= \# \left(\bigcup_{i=1}^m \Delta_i^{(1)} \cap \bigcup_{j=1}^m \partial \Delta_j^{(2)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \# \left(\Delta_i^{(1)} \cap \partial \Delta_j^{(2)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \# \left(\partial \Delta_i^{(1)} \cap \Delta_j^{(2)} \right) = \\ &= \#(\partial F \cap G).\end{aligned}$$

Abbiamo concluso:

$$\begin{aligned}lk(L = \alpha \cup \beta) &= \#(\partial F \cap G) = \#(F \cap \partial G), \\ \partial F &= \alpha, \quad \partial G = \beta.\end{aligned}$$

Vedremo che queste uguaglianze ci permetteranno di dare un'interpretazione 'omologica' del numero di allacciamento.

Omologia singolare (brevi richiami)

(4)

L' n -simpleso standard è

$$\Delta_n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

$$v_0 = (1, 0, \dots, 0), v_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1) \in \Delta_n$$

sono i **vertici** di Δ_n .

Esempi:

$$\Delta_0 \approx \cdot, \quad \Delta_1 \approx \text{---}, \quad \Delta_2 \approx \text{triangle}$$

$$\Delta_3 \approx \text{tetrahedron} = \text{tetraedro solido}, \text{ etc...}$$

Definizione: un n -simpleso singolare in uno spazio topologico X è un'applicazione continua $\varphi: \Delta_n \rightarrow X$

Oss: un 1-simpleso singolare $\varphi: \Delta_1 \rightarrow X$ determina un cammino $f_\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ ponendo $f_\varphi(t) := \varphi(t, 1-t)$. Viceversa, un cammino $f: [0, 1] \rightarrow X$ determina un 1-simpleso singolare $\varphi_f: \Delta_1 \rightarrow X$ ponendo $\varphi_f(1-x, x) := f(x)$.

Definizione: Il gruppo $S_n(X)$ delle **n -catene**

⑤
singolari di X è il gruppo Abeliano
libero generato dagli n -simplici singolari
 $\varphi: \Delta_n \rightarrow X$.

Per $i = 0, \dots, n$, sia $\partial_i: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$
l'unico omomorfismo che su ogni n -simplex
singolare $\varphi: \Delta_n \rightarrow X$ è definito da

$$\partial_i \varphi_j(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi_j(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}).$$

Quindi $\partial_i: \sum_j n_j \varphi_j \mapsto \sum_j n_j \partial_i \varphi_j$

Ora si definisce l'operatore di bordo

$$\partial_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X) \quad \text{ponendo } S_{-1}(X) = 0,$$

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i, \quad \partial_0 = 0$$

Definizioni: (a) $Z_n(X) := \ker \partial_n \subset S_n(X)$
è il gruppo degli n -cicli.

(b) $B_n(X) = \operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \subset S_n(X)$ è
il gruppo degli n -bordi.

Teorema: $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ □

Per il teorema, $B_n(X) \subset Z_n(X)$. ⑥

Definizione: $H_n(X) := Z_n(X) / B_n(X)$
è l' n -esimo gruppo di omologia di X

Fatti: (1) $X = \{P\} \Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, n=0 \\ 0, n>0 \end{cases}$.

(2) $X \neq \emptyset$, connesso $\Rightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

(3) Data $f: X \rightarrow Y$ mappa continua,
la mappa

$$f_{\#}: S_n(X) \rightarrow S_n(Y), \quad (\forall n)$$
$$\sum_j n_j \varphi_j \longmapsto \sum_j n_j (f \circ \varphi_j)$$

soddisfa:

$$\begin{array}{ccc} S_{n+1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_{n+1}(Y) \\ \downarrow \partial & \searrow \text{hook} & \downarrow \partial \\ S_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_n(Y) \end{array}$$

commuta $\rightarrow$

$$\Rightarrow f_{\#} Z_n(X) \subset Z_n(Y), f_{\#} B_n(X) \subset B_n(Y)$$

$$\Rightarrow \text{induce } f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$
$$[c] \longmapsto [f_{\#} c]$$

$$(4) \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \Rightarrow \quad \forall n \geq 0 \quad (7)$$

$$g_* \cdot f_* = (gf)_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Z)$$

$$(5) \quad (id_X)_* = id_{H_n(X)}$$

Quindi H_* definisce un funttore

$$(\text{Spazi top., appl. cont.}) \rightarrow (\text{Gruppi Ab., omomorf.})$$

$$(6) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{omotope}}}{f} \simeq g : X \rightarrow Y \Rightarrow f_* = g_*$$

Quindi spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omologia isomorfi.

Osservazione: $f : [0, 1] \rightarrow X$ cammino chiuso
 $(f(0) = f(1)) \Rightarrow$ 1-simplesso associato definisce

$$\text{un } 1\text{-ciclo} : \quad \varphi_f : \Delta_1 \rightarrow X$$

$$\varphi_f(1-x, x) = f(x)$$

$$\partial \varphi_f = \partial_0 \varphi_f - \partial_1 \varphi_f, \quad \partial_0 \varphi_f(1) = \varphi_f(0, 1) = f(1)$$

$$\partial_1 \varphi_f(1) = \varphi_f(1, 0) = f(0) \Rightarrow \partial \varphi_f = 0.$$

(7) Teorema (Hurwitz) C'è un omomorfismo ⑧

$\pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ che manda $[\gamma]$ nella classe $[\varphi_\gamma]$. È surgettivo se X è connesso, e il nucleo è il sottogruppo dei

commutatori di $\pi_1(X, x_0)$. In particolare,

$$X \text{ connesso} \Rightarrow H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)_{ab}.$$

Corollario: $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}^2$.

(8) Dati due aperti $U_1, U_2 \subset X$

$$\text{con } U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, X = U_1 \cup U_2 \Rightarrow$$

$$\exists \text{ omomorfismo } H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2)$$

e una successione esatta (detta di Mayer-Vietoris)

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_{k+1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{f} H_{k+1}(U_1) \oplus H_{k+1}(U_2) \xrightarrow{g}$$

(9)

$$\rightarrow H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \rightarrow \dots$$

dove $f(x) = (i_1)_* x, -(i_2)_* x$, $g(x, y) = (j_1)_* x + (j_2)_* y$

$$\text{e } U_1 \cap U_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} U_1 \\ \xrightarrow{j_2} U_2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} U_1 \xrightarrow{j_1} X \\ U_2 \xrightarrow{j_2} X \end{array}$$

$\Delta[c]$ è definita così: suddividendo i domini

dei semplici singolari si scrive $c = u_1 + u_2$, con $u_i \in S_{k+1}(U_i)$,

$i=1, 2$. Allora $\partial c = \partial u_1 + \partial u_2 = 0 \Rightarrow \partial u_1 = -\partial u_2 \in S_k(U_1 \cap U_2)$.

Si pone $\Delta[c] = [\partial u_1]$ e si dimostra che non dipende dalle scelte.

$$(9) \quad S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

$$\Rightarrow H_k(S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad k = 0, n \\ 0 & , \quad k \neq 0, n \end{cases}$$

[Esercizio: dimostrare per induzione usando
(1) - (8)]

①

Calcoliamo tutta l'omologia di $T := S^1 \times S^1$

Cominciamo con un punto: $H_n(\{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, n=0 \\ 0, n>0 \end{cases}$

Infatti, il complesso $(S_n(\{p\}), \partial_n)$ si

scrive:

$$\begin{aligned} & \rightarrow S_4(\{p\}) \xrightarrow{\partial_4} S_3(\{p\}) \xrightarrow{\partial_3} S_2(\{p\}) \xrightarrow{\partial_2} S_1(\{p\}) \xrightarrow{\partial_1} S_0(\{p\}) \rightarrow 0 \\ \dots & \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Perché le mappe ∂_i sono tutte uguali [esercizio].

Applicando Mayer-Vietoris ad $S^1 = U_1 \cup U_2$

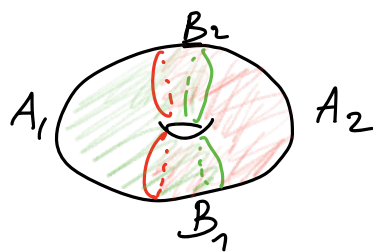
$\underbrace{\quad}_{\text{intervallo aperto}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{intervallo aperto}}$

possiamo calcolare: $H_i(S^1) = 0 \quad \forall \quad i > 1$ (esercizio).

Ora sia $T = A_1 \cup A_2$, con $A_1 \cap A_2 = B_1 \sqcup B_2$,

$A_i, B_i \subset T$ anelli:

$\underbrace{\quad}_{S^1} \quad \underbrace{\quad}_{S^1}$



$\Rightarrow$ MV:

$$0 \rightarrow H_2(T) \rightarrow H_1(B_1) \oplus H_1(B_2) \rightarrow H_1(A_1) \oplus H_1(A_2) \rightarrow H_1(T)$$

$$\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

$(a, b) \mapsto (0, a+b)$

e $H_i(T) = 0 \quad \forall \quad i > 2$.

(2)

$K \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ modo liscio.

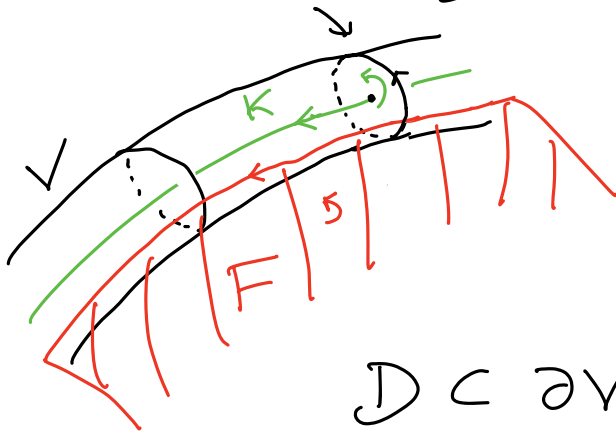
Usando il fatto che K è una sottovarietà e che esiste una superficie di Seifert F con $\partial F = K$, si dimostra che esiste un intorno V di K e un omeomorfismo $V \approx S^1 \times D^2$ tali che:

$$K \leftrightarrow S^1 \times 0$$

$$\partial V \cap F \leftrightarrow S^1 \times p, \quad p \in \partial D$$

disco normale:

$$D \leftrightarrow e^{ix} \times D^2$$



Un'orientazione di K induce orientazioni su tutti i dischi normali.

$D \subset \partial V$ disco normale $\Rightarrow$

$m = \partial D$ curva semplice chiusa definita da un cammino chiuso: definisce $[m] \in \pi_1(\partial V) \cong H_1(\partial V)$ detta classe del

meridiano canonico

Analogamente, la curva $l = F \cap \partial V$, orientata come il bordo di $\overline{F \setminus V}$, definisce

$[l] \in \pi_1(\partial V) \cong H_1(\partial V)$, detta classe delle

longitudine canonice

(3)

$\partial V \approx S^1 \times S^1$, il gruppo $\pi_1(S^1 \times S^1)$ è Abeliano libero,

generato dalle classi di $\ell: [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \times S^1$ e

$$x \longmapsto (e^{ix}, 1)$$

$m: [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \times S^1$

$$y \longmapsto (1, e^{iy})$$

$\Rightarrow$ le classi del meridiano e delle

longitudine canoniche sono generatori di

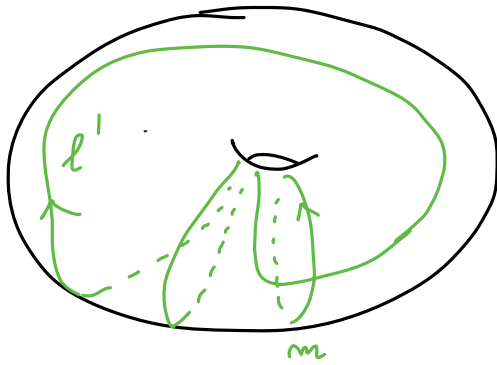
$H_1(\partial V) \cong \mathbb{Z}^2$. Inoltre, se

$i_*: H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V)$, $i_*[m] = 0$ e

$i_*[\ell]$ è un generatore di $H_1(V) \cong \mathbb{Z}$ [Esercizio]

Quindi $\text{Ker}(i_*: H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V)) \cong \mathbb{Z}$ e
 deve essere generato da $[m]$, perché è una classe
 primitiva.

Una qualunque curva semplice, chiusa e orientata
 $\ell' \subset \partial V$ tale che $i_*[\ell']$ genera $H_1(V)$ è detta **longitudine**.

Esempio

$$[l'] = [l] + 2[m]$$

per $\uparrow$ Hurwitz

Poiché $[m]$ genera $\text{Ker}(H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V))$,
 se $l' \subset \partial V$ è una longitudine,
 $[l'] - [l] = k[m]$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Ora sia $X := S^3 \setminus \overset{\circ}{V}$. Allora $m \subset \partial V$ definisce
 una classe in $i_*[m] \in H_1(X)$, $i: \partial V \hookrightarrow X$.

Anche ogni longitudine $l' \subset \partial V$ definisce una
 classe $i_*[l'] \in H_1(X)$. Ma se $l = F \cap \partial V$ è la
 longitudine canonica, $l = \partial(F \cap X) \Rightarrow i_*[l] = 0$.

Teorema:

- $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$, generato da $i_*[m]$.
- $[l]$ genera $\text{Ker}(H_1(\partial V) \rightarrow H_1(X)) \cong \mathbb{Z}$.
- $H_2(X) = H_3(X) = 0$
- $C \subset X$ curva semplice chiusa orientata
 $\Rightarrow [C] = lk(C, m) \cdot [m] \in H_1(X)$

dimostrazione:

$$S^3 = \dot{V} \cup S^3 \setminus K, \quad S^1 \simeq \dot{U}_1, \quad \dot{U}_2 \simeq X$$

(5)

$$U_1 \cap U_2 = \dot{V} \setminus K \simeq \partial V', \quad V' \subset V^0 \text{ intorno a tubolare chiuso di } K.$$

Mayer-Vietoris:

$$\begin{aligned} H_3(U_1 \cap U_2) &\rightarrow H_3(U_1) \oplus H_3(U_2) \rightarrow H_3(S^3) \xrightarrow{f} 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \mathbb{Z} \quad S^1 \times S^1 \quad 0 \quad X \quad \mathbb{Z} \\ &\rightarrow H_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_2(U_1) \oplus H_2(U_2) \rightarrow H_2(S^3) = 0 \\ &\rightarrow H_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{g} H_1(U_1) \oplus H_1(U_2) \rightarrow H_1(S^3) = 0 \\ &\rightarrow H_0(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_0(U_1) \oplus H_0(U_2) \rightarrow H_0(S^3) = 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}^2 \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow H_0(X) \cong \pi_0(X)$ [esercizio]

G Abelian, privo di torsione, di rango 1

$$\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che $H_2(U_1 \cap U_2 \simeq \partial V') \cong \mathbb{Z}$ è generato dalle classi di una triangolazione σ vista come 2-ciclo, ottenuta estendendo una triangolazione di due cerchi: se $\partial V' = A_1 \cup A_2$

$\uparrow \quad \uparrow$
 anelli
 (aperti)

(6)

Esercizio

$$0 \rightarrow H_2(\partial V) \rightarrow H_1(A_1 \overset{2 \text{ cerchi}}{\cap} A_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$[\tau] \mapsto \xi,$$

dove ξ = generatore

del nucleo di $H_2(A_1 \cap A_2) \rightarrow H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)$.

$\Rightarrow [\tau]$ genera $H_2(\partial V)$

Se estendiamo la triangolazione su $\partial V'$ ad una triangolazione $\tilde{\tau}$ di S^3 , $f([\tilde{\tau}]) = [\tau]$ (per come è definita la successione di MV).

Quindi f è surgettiva $\Rightarrow$ è iniettiva,
dunque $H_2(X) = H_3(X) = 0$.

dimostrazione [continue]

$$g : \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^2$$

$$\begin{aligned} [l] &\longmapsto (1, 0) \\ [m] &\longmapsto (0, a) \end{aligned}$$

$l = \partial V' \cap F$,
 $F = \text{sup. di Seifert per } K$.

$(0, 1) \in \text{Im}(g) \Rightarrow a = \pm 1$. $[m]$ generatore di $H_1(X)$
 Inoltre, $\langle [l] \rangle = \text{Ker} (H_1(\partial V') \rightarrow H_1(X)) \cong \mathbb{Z}$

Sia ora $C \subset X$ c.s.c. orientata. Sia
 $F = \text{superficie di Seifert per } C$, con

$F \cap K = \text{n.ro finito di phi trasversi}$
 $\{P_1, \dots, P_k\}$.

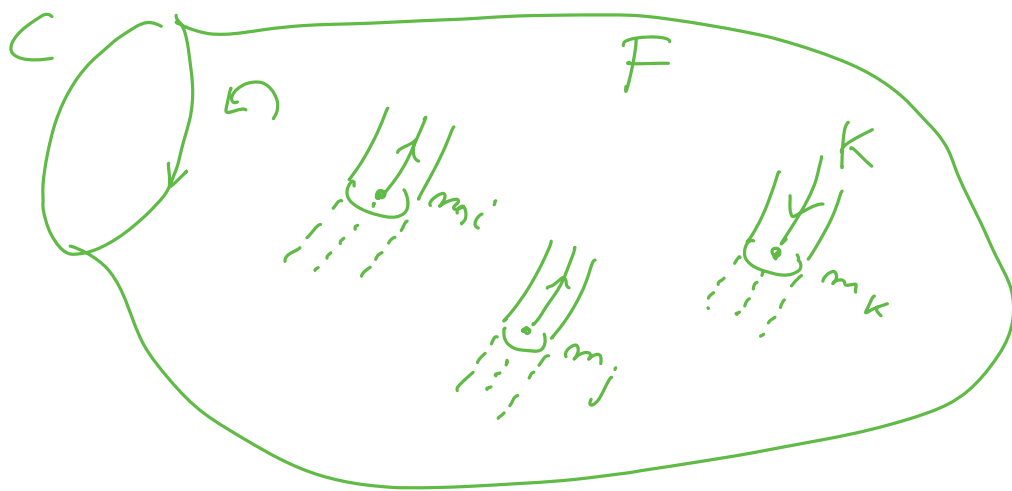
Siano $m_1, \dots, m_k \subset \partial V'$ meridiani orientati
 che bordano dischi $D_1, \dots, D_k \subset V'$ con
 $D_i \cap K = P_i$, $i = 1, \dots, k$.

Una triangolazione di
 $F \setminus \bigcup_i D_i$ mostra che

$$\partial(F \setminus \bigcup_i D_i) = C - \sum_{i=1}^k \varepsilon(P_i) m_i$$

come 1-cetene,

dove $\varepsilon(p_i) = \text{segno dell'intersezione}$
di K ed F in p_i .



Passando alle classi in $H_1(X)$,

poiché $[m_i] = [m] \forall i$

Esercizio
facile

e poiché possiamo scegliere F in modo

che $\#(F \cap K) = \ell_K(C, K)$,

concludiamo

$$[C] = \left[\sum_{i=1}^k \varepsilon(p_i) \right] [m] = \ell_K(C, K) [m].$$



Fatto (Rolfsen, Teorema 2.C.16)

Due curve orientate semplici e chiuse $J, K \subset S^1 \times S^1$ sono isotope tramite un'isotopia ambiente di $S^1 \times S^1$

$$\Leftrightarrow [J] = \pm [K] \in H_1(S^1 \times S^1).$$

Conseguenze del fatto:

- Un generatore di $H = \text{Ker}(i_*: H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V)) \cong \mathbb{Z}$ è unico a meno del segno
 $\Rightarrow$ ha senso definire il **meridiano canonico** di un nodo K come la classe di isotopia di una curva semplice chiusa, orientata $m \subset \partial V$ la cui classe $[m]$ genera H .
- Un generatore di $K := \text{Ker}(i_*: H_1(\partial V) \rightarrow H_1(X)) \cong \mathbb{Z}$ è unico a meno del segno
 $\Rightarrow$ ha senso definire la **longitudine canonica** di un nodo K come la classe di isotopia di una curva semplice chiusa, orientata $\ell \subset \partial V$ la cui classe $[\ell]$ genera K .

(4)

Lemma: una classe $a[l] + b[m] \in \pi_1(S^1 \times S^1)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, è rappresentata da un cammino semplice chiuso $\Leftrightarrow (a, b) = (0, 0)$ oppure $\text{mcd}(a, b) = 1$.

dim.: $(a, b) = (0, 0) \Rightarrow$ è rappresentata da $\rightarrow \textcircled{Q}$
 $\text{mcd}(a, b) = 1 : p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$
 rivestimento $(x, y) \mapsto (e^{ix}, e^{iy})$ $p(x, y) = p(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') + 2\pi \cdot \mathbb{Z}^2$
 universale, $a[l] + b[m]$ rappresentata da $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$:

Se $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$, $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ $t \mapsto p(2\pi at, 2\pi bt)$

$\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sollevamento di $\gamma \Rightarrow \tilde{\gamma}|_{[t_0, t_1]}$ sollevamento
 $t \mapsto (2\pi at, 2\pi bt)$

di $\gamma|_{[t_0, t_1]}$. $\Rightarrow (t_0 - t_1) \cdot 2\pi(a, b) = 2\pi \cdot (m, n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (a, b) = \frac{1}{t_0 - t_1} \cdot (m, n), \quad \left| \frac{p}{q} \right| \geq 1, \quad a = \frac{p}{q}m, \quad b = \frac{p}{q}n$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \left| \frac{p}{q} \right| > 1 \Rightarrow |p| > 1 \Rightarrow \text{mcd}(a, b) \neq 1.$$

$$\text{mcd}(p, q) = 1 \Rightarrow \left| \frac{p}{q} \right| = 1 \Rightarrow t_0 = 0, t_1 = 1 \quad \checkmark \quad (\Leftrightarrow)$$

Viceversa, sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$ cammino semplice chiuso,

$[\gamma] = a[l] + b[m]$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Se $\text{mcd}(a, b) = d > 1$,

$(a, b) = d \cdot (m, n)$. Se $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ solleva γ ,

$\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = 2\pi \cdot (a, b)$. La conclusione segue dal

Teorema (della corda) [Rolfser, Teorema 2. B. 12].

(5)

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ sottoinsieme connesso per archi,

$C \subseteq X$ corda = segmento lineare con estremi su X

$\Rightarrow \forall n > 0, n \in \mathbb{Z}, \exists$ corda parallela a C

con estremi su X e lunghezza $\frac{1}{n}|C|$. $\square$

Per il teorema $\exists s, t \in [0, 1]$ con $\tilde{\gamma}(s) - \tilde{\gamma}(t) = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$.

Ma allora $\gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow \gamma$ non semplice. $\mathbb{Z}^2$

$\square$

Corollario: la longitudine canonica è, a meno di isotopia, l'unica curva semplice, chiusa, orientata su ∂V che ha numero di avvolgimento nullo con K .

Dimostrazione: $\ell \subset \partial V$ longitudine canonica,

$$i_*: H_1(\partial V) \rightarrow H_1(X), \Rightarrow i_*[\ell] = 0 \Rightarrow \ell k(K, \ell) = 0$$

Sia $C \subset \partial V$ c.s.c. orientata, $\Rightarrow$

LEMMA

$$[C] = a[m] + b[\ell] \in H_1(\partial V) \text{ primitiva}$$

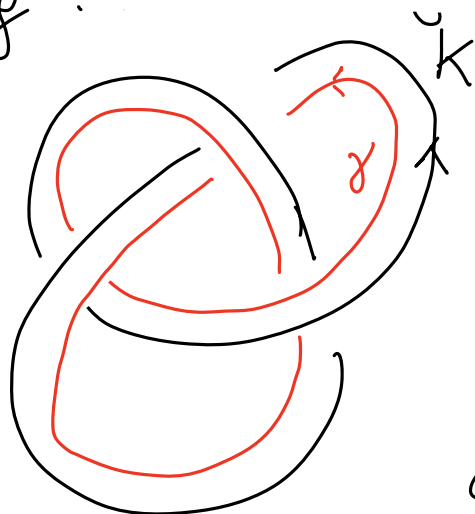
$\Downarrow$

$$i_*[C] = a i_*[m] + b i_*[\ell] = a i_*[m] \in H_1(X).$$

$$\text{Quindi } i_*[C] = 0 \Rightarrow a = \ell k(C, K) = 0$$

$$\Rightarrow [C] = \pm [\ell] \Rightarrow C \text{ isotopa ad } \ell. \quad \square$$

Esempio: Consideriamo un diagramma D del trifoglio destro e la curva $\gamma \subset \partial V$ determinata dal cosiddetto "blackboard framing":

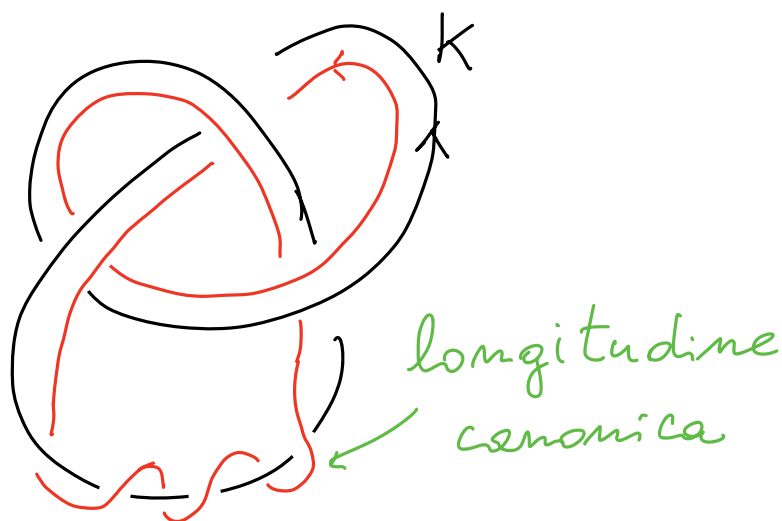


Calcolando troviamo

$$lk(\gamma, K) = +3.$$

$$\sum_{C \in \text{invariants}(D)} \varepsilon(C) =: \text{writhe}(D)$$

Di conseguenza, la longitudine canonica di K sarà la seguente:



①

Teorema: $L \subset S^3$ link orientato,
 $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ n componenti.

$$X := S^3 \setminus \mathring{V}(L)$$

$$\Rightarrow H_1(X) \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}[m_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[m_n],$$

$[m_i]$ = classe del meridiano canonico di L_i ,

$$H_2(X) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \quad e \quad H_3(X) = 0.$$

Dimostrazione: $S^3 = V \cup \underset{\substack{\downarrow \\ X}}{S^3 \setminus L}$

Applichiamo la successione di M-V:

$$\begin{array}{ccccccc} H_3(\partial V) & & 0 & & 0 & & 1 \mapsto (1, \dots, 1) \\ \parallel & \parallel & \parallel \leftarrow V \simeq \bigcup_i S^1 & & \parallel \leftarrow \mathbb{Z}^n \text{ (triang.)} & \in \mathbb{Z}^n & \\ 0 \rightarrow H_3(X) \oplus H_3(V) & \rightarrow & H_3(S^3) & \rightarrow & H_2(\partial V) & \rightarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 \text{ noto} & & \\ & & \parallel \leftarrow V \simeq \bigcup_i S^1 & & \parallel \leftarrow & & \\ \rightarrow H_2(X) \oplus H_2(V) & \rightarrow & H_2(S^3) & \rightarrow & H_1(\partial V) & \rightarrow & \\ & & & & \parallel \mathbb{Z}^{2n} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel \mathbb{Z}^n & & & & & & \\ \rightarrow H_1(V) \oplus H_1(X) & \rightarrow & H_1(S^3) & = & 0 & & \\ \parallel \mathbb{Z}^n & & \parallel G & & \uparrow \text{ noto} & & \end{array}$$

$$\Rightarrow H_2(X) \cong \mathbb{Z}^n / \langle (1, \dots, 1) \rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1} \text{ (esercizio).} \quad (2)$$

e G Abeliano, $\text{Tor} G = 0$, di rango $2n - n = n$

$$\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}^n.$$

Analizziamo l'isomorfismo:

$$H_1(\partial V) \xrightarrow{\cong} H_1(X) \oplus H_1(V)$$

$$[m_i] \longmapsto ([m_i], 0)$$

$$[l_i] \longmapsto (\alpha_i, [L_i])$$

m_i, l_i = meridiano e longitudine

canonici di L_i .

Sia $\beta \in H_1(X)$. Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (\beta, 0) &= \sum_i a_i ([m_i], 0) + \sum_j b_j (\alpha_j, [L_j]) \\ &= \left(\sum_i a_i [m_i] + \sum_j b_j \alpha_j, \sum_j b_j [L_j] \right). \end{aligned}$$

(3)

Poiché le classi $[L_j]$ sono indipendenti,

$$\sum_j b_j [L_j] = 0 \Rightarrow b_j = 0 \quad \forall j \Rightarrow$$

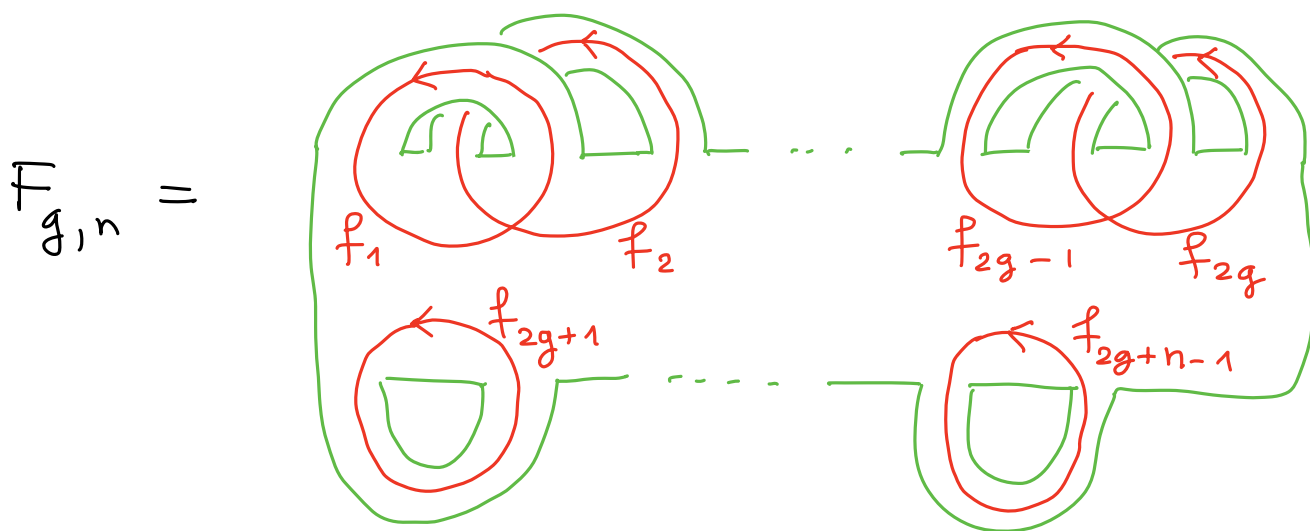
$$\beta = \sum_i a_i [m_i], \text{ che è ciò che}$$

doveremo dimostrare. □

Forma di Seifert

$$L = L_1 \cup \dots \cup L_n \subset S^3 \text{ link,}$$

$$F \approx F_{g,n}, \quad \partial F = L, \quad \text{surf. di Seifert.}$$



$\pi_1 F_{g,n}$ + Hurwitz, oppureEsercizio: (MV + induzione su g ed n)

$$H_1(F_{g,n}) \cong \langle f_i \rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2g+n-1} & , n > 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & , n = 0 \end{cases}$$

Proposizione: c'è un isomorfismo

$H_1(S^3 \setminus F) \cong H_1(F)$ ed esiste
un'applicazione bilineare non degenere

$$\beta: H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \longrightarrow \mathbb{Z}, \text{ caratterizzata}$$

dalla proprietà:

$$c \subset S^3 \setminus F, \quad d \subset F \quad \text{c. s. c. orientate}$$

$$\Rightarrow \beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d).$$

Per dimostrare la proposizione
avremo bisogno di un fatto standard
sull'omologia singolare, che ora
vedremo rapidamente.

Dato uno spazio topologico X e

un suo sottospazio $A \subset X$, c'è un' inclusione naturale ⑤

$$S_k(A) \subset S_k(X)$$

che commuta con ∂_k :

$$\begin{array}{ccc} S_k(A) & \hookrightarrow & S_k(X) \\ \downarrow \partial_k & & \downarrow \partial_k \\ S_{k-1}(A) & \hookrightarrow & S_{k-1}(X) \end{array}$$

Questo induce un omomorfismo

$$\bar{\partial}_k: S_k(X)/S_k(A) \rightarrow S_{k-1}(X)/S_{k-1}(A)$$

con $\bar{\partial}_k \circ \bar{\partial}_{k+1} = 0$. Il gruppo

$$H_k(X, A) := \text{Ker}(\bar{\partial}_k) / \text{Im}(\bar{\partial}_{k+1})$$

è il k -esimo **gruppo di omologia relativa** della coppia (X, A) .

Fatto: (successione esatta della coppia)

Introduciamo notazioni per le mappe di inclusione e proiezione: ⑥

$$i_{\#} : S_n(A) \rightarrow S_n(X), \quad j_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(X)/S_n(A)$$

Allora c'è una successione esatta

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} \\ & \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

∂_* è definito usando il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \rightarrow & S_n(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & S_n(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & S_n(X)/S_n(A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \rightarrow & S_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \end{array}$$

data $[u] \in H_n(X, A)$ con $u \in S_n(X)/S_n(A)$

e $\bar{\partial}u = 0$, se $\tilde{u} \in S_n(X)$, $j_{\#}\tilde{u} = u$

si ha $j_{\#}\partial\tilde{u} = \bar{\partial}j_{\#}\tilde{u} = \bar{\partial}u = 0$,

quindi $\partial\tilde{u} = i_{\#}v$ con $v \in S_{n-1}(A)$.

Ora $i_{\#}\partial v = \partial i_{\#}v = \partial^2\tilde{u} = 0$, quindi $\partial v = 0$ e
 in senso stretto $\partial_*[u] = [v] \in H_{n-1}(A)$.

Si verifica che σ_* è ben definito, (7)
 e' un omomorfismo e rende la
 successione esatta.

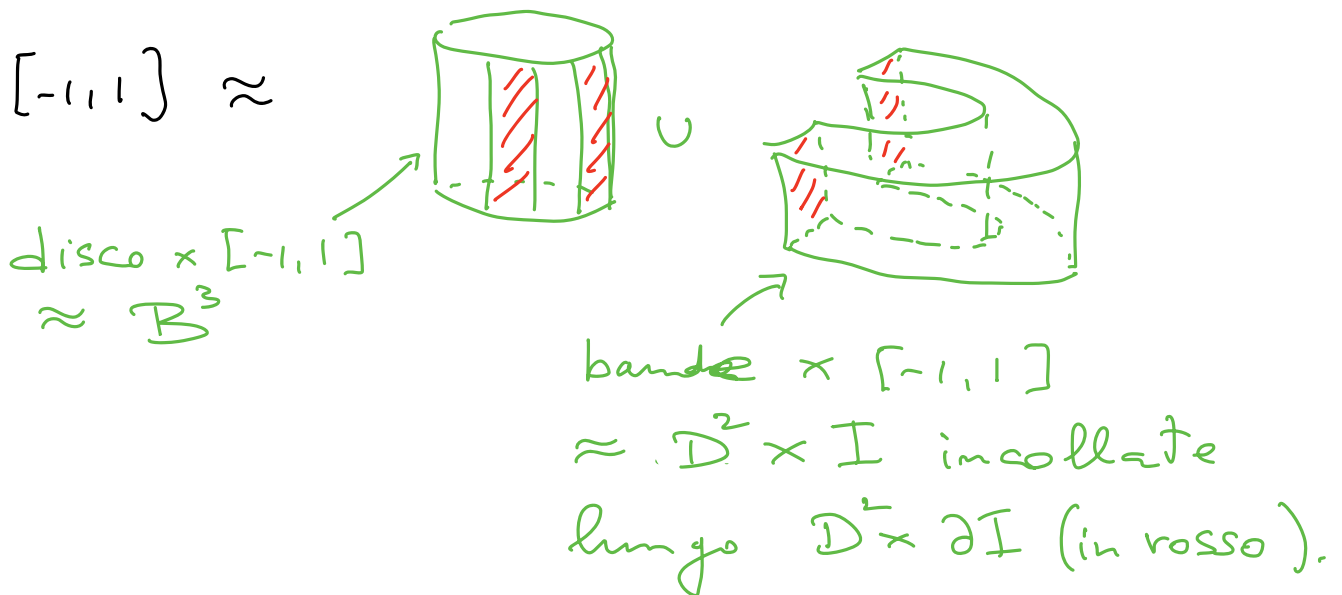
dimostrazione della proposizione:

Sia V un piccolo intorno di F in S^3 .
 Fatto: $V \approx F \times [-1, 1]$.

Pensiamo $F = \text{disco} \cup \text{bande} \approx I \times [0, 1]$.

Allora

$$F \times [-1, 1] \approx$$

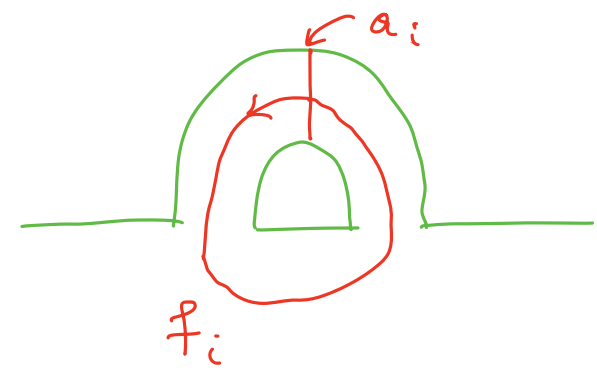


$\Rightarrow V \approx$ corpo con manici di genere
 $2g + n - 1$

Allora $\partial V \approx$ superficie orientabile chiusa
 di genere $2g + n - 1$.

Ora vogliamo definire delle curve su ∂V .

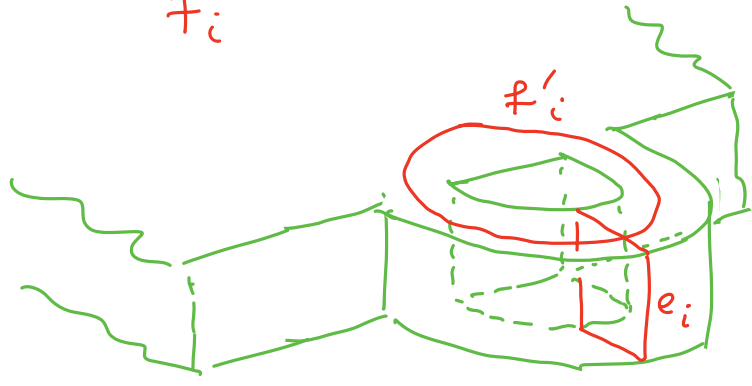
8



$$f'_i := f_i \times 1 \subset \partial V$$

$$e_i := \partial \left(\underbrace{a_i \times [-1, 1]}_{D_i} \right)$$

orientiamo e_i
in modo che
 $\text{lk}(f_i, e_j) = \delta_{ij}$



Consideriamo la successione esatta
della coppia $(V, \partial V)$:

$$\cdots \rightarrow H_2(V) \xrightarrow{j_*} H_2(V, \partial V) \xrightarrow{\partial_*} H_1(\partial V) \xrightarrow{i_*} H_1(V) \rightarrow \cdots$$

$V \simeq \text{wedge di } S^1 + MV$

$$[D_i] \mapsto [e_i] \mapsto 0$$

dalla def. $[f'_j] \mapsto [f_j]$
di ∂_*

$\Rightarrow i_*$ iniettiva su $H_1(V) = \langle f_j \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1}$

[ESERCIZIO]

$$H_1(\partial V) \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{Z} \langle [e_i], [f'_j] \rangle \Rightarrow$$

$$H_2(V, \partial V) \cong \text{Ker}(i_*) = \mathbb{Z} \langle [e_i] \rangle$$

$$\Rightarrow H_2(V, \partial V) \cong \mathbb{Z} \langle [D_i] \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1}$$

Oss: $\#(D_i \cap f_j) = \delta_{ij} = \text{lk}(e_i, f_j)$. ①

Ora sia $V' = \overline{S^3 \setminus V} \simeq S^3 \setminus F$.

$S^3 = \dot{V} \cup S^3 \setminus F \implies MV:$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{0''} H_2(S^3) \rightarrow H_1(\partial V) \xrightarrow{\cong} H_1(V) \oplus H_1(V') \longrightarrow \\ \longrightarrow H_1(S^3) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} [e_i] \mapsto (0, [e_i]) \\ [f'_j] \mapsto ([f_j], \alpha_j) \end{array}$$

Sia $\beta \in H_1(V')$. Allora $(0, \beta) \in H_1(V) \oplus H_1(V')$,

$$(0, \beta) = \sum_i \lambda_i (0, [e_i]) + \sum_j \mu_j ([f_j], \alpha_j)$$

$$\implies \sum_j \mu_j [f_j] = 0 \in H_1(V) \xRightarrow{\{[f_j]\}_{\text{base}}} \mu_j = 0 \forall j$$

$$\implies \beta = \sum_i \lambda_i [e_i]. \text{ Dalle successione}$$

esatta sappiamo $H_1(V') \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1} \cong H_1(F)$

Quindi $H_1(S^3 \setminus F) \cong H_1(V') \cong \mathbb{Z} \langle [e_i] \rangle$

Definiamo $\beta: H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$

(2)

ponendo $\beta([e_i], [f_j]) = \delta_{ij}$ ed
estendendo per bilinearità.

Osserviamo che abbiamo costruito le basi $\{[e_i]\}$
e $\{[f_j]\}$ di $H_1(V')$ e $H_1(V)$ partendo da
un omeomorfismo $F \cong F_{g,n}$, ovvero da
una decomposizione di F come disco $\cup$ bande.

Quindi dobbiamo mostrare che β non
dipende dalla scelta di una tale
decomposizione. Per farlo, dimostriamo:

Affermazione: la β così definita

è chiaramente non degenera e

soddisfa le seguenti proprietà:

(3)

(*) $c \subset S^3 \setminus F$, $d \subset F$ c.s.c. orientate

$$\Rightarrow \beta([c], [d]) = \ell k(c, d).$$

Supponiamo c, d come in (*).

$$\text{Allora } [c] = \sum_i \lambda_i [e_i], [d] = \sum_j \mu_j [f_j],$$

$$\text{con } \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{Z}.$$

Per definizione di β abbiamo

$$\beta([c], [d]) = \sum_i \lambda_i \mu_i.$$

$$\text{Dobbiamo verificare: } \ell k(c, d) = \sum_i \lambda_i \mu_i.$$

Idea: esprimiamo ogni $[f_j]$

come un multiplo di $[m_c]$.

Per farlo, esprimiamo $[c]$ come multiplo di m_{f_j} .

Abbiamo $c, e_i \subset S^3 \setminus F \subset S^3 \setminus f_j$, ④

$$\text{e } \ell k(e_i, f_j) = \delta_{ij} \Rightarrow [e_i] = \delta_{ij} [m_{f_j}] \in H_1(S^3 \setminus f_j)$$

$$\Rightarrow [c] = \sum_i \lambda_i [e_i] = \lambda_j [m_{f_j}] \in H_1(S^3 \setminus f_j)$$

$$\text{In altre parole, } \lambda_j = \ell k(c, f_j)$$

$$\Rightarrow [f_j] = \lambda_j [m_c] \in H_1(S^3 \setminus c).$$

Dunque

$$[d] = \sum_j \mu_j [f_j] = \left(\sum_j \mu_j \lambda_j \right) [m_c]$$

$$\text{in } H_1(S^3 \setminus c), \text{ ovvero } \ell k(c, d) = \sum_j \mu_j \lambda_j.$$

Questo dimostra l'affermazione. Ora,

$$\text{se } \beta': H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

fosse un'applicazione bilineare ottenuta

da un'altra decomposizione di F ,

(5)

allora per lo stesso ragionamento fatto per

β , β' soddisfarebbe (*). In particolare,

scegliendo $c = e_i$, $d = f_j$,

$$\beta'([e_i], [f_j]) = \ell k(e_i, f_j) = \delta_{ij} = \beta([e_i], [f_j])$$

$$\Rightarrow \beta' = \beta \quad \square$$

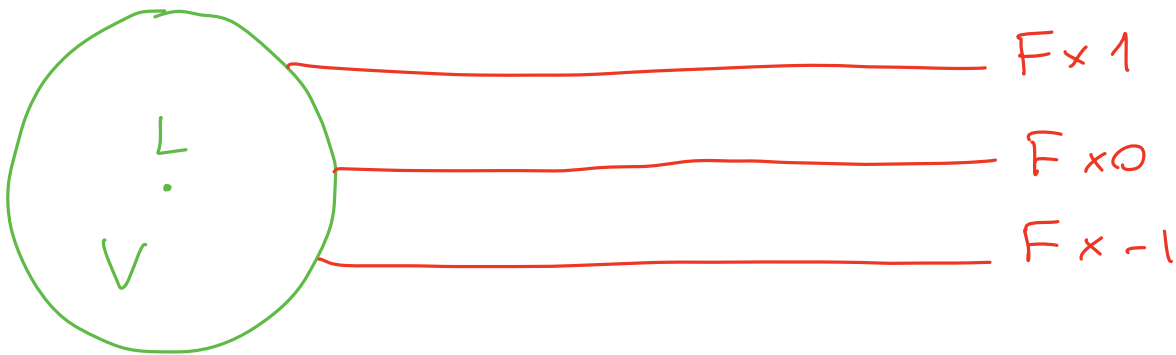
LA FORMA DI SEIFERT

$F \subset S^3$ superficie di Seifert orientata
del link L ,

V = intorno tubolare di L ,

$X = \overline{S^3 \setminus \overset{\circ}{V}} \simeq S^3 \setminus L$ esterno di L

OSS. : $F \cap X =$ copia omeomorfa di F ,
che indichiamo ancora con F .



Consideriamo un intorno di $F \simeq F \times [-1, 1]$
come in figura, in modo che ogni
meridiano orientato di L 'entri'
nell'intorno da $F \times -1$ ed 'esca' da
 $F \times 1$. Siamo

$$i^{\pm} : F \longrightarrow S^3 \setminus F$$

$$x \longmapsto i^{\pm}(x) = x \times \pm 1$$

DEF: $\alpha: H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$\alpha(x, y) := \beta(i_*^- x, y)$$

è la forma di Seifert associata ad $F \subset S^3$.

OSS: α è (chiaramente) bilineare.

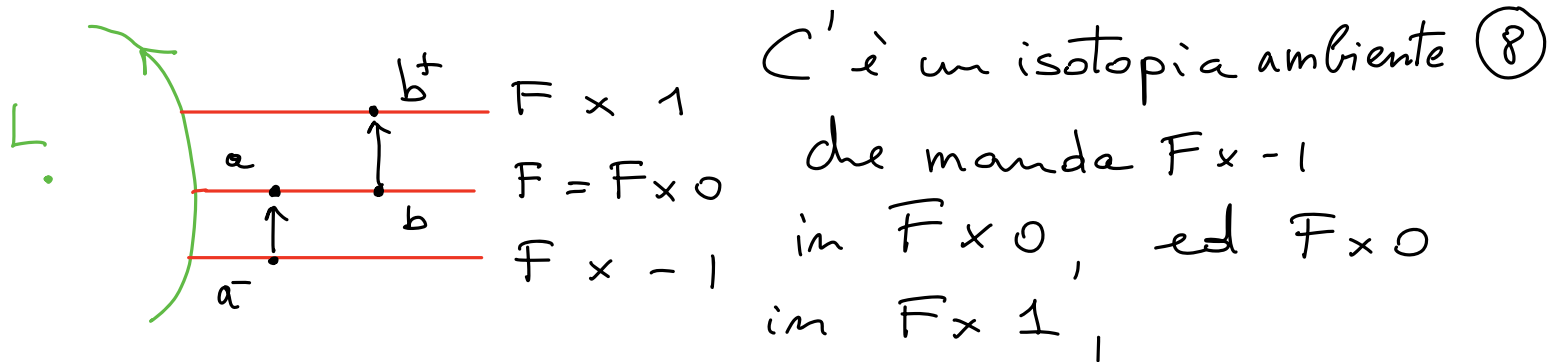
Affermazione: $\beta(i_*^- x, y) = \beta(i_*^+ y, x)$.

Poiché le c.s.c. generano $H_1(F)$, è sufficiente verificare l'affermazione per $x = [a]$, $y = [b]$, dove $a, b \in F$ sono c.s.c. orientate.

Notazione: $c \in F$ c.s.c. $\Rightarrow c^\pm := c \times \pm 1$.

$$\begin{aligned} \alpha([a], [b]) &= \beta(i_*^- [a], [b]) = \beta([a^-], [b]) \\ &= \ell k(a^-, b). \end{aligned}$$

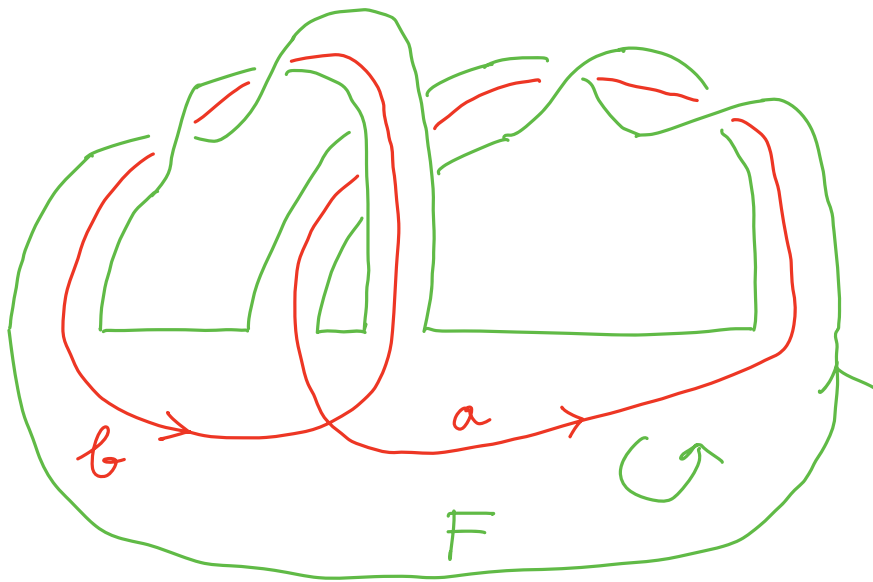
Poiché $\beta(i_*^+ [b], [a]) = \beta([b^+], [a]) = \ell k(b^+, a)$,
 basta verificare: $\ell k(a, b^+) = \ell k(a^-, b)$.



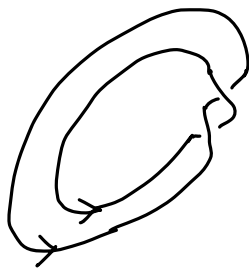
mandando la coppia (a^-, b) in (a, b^+) .

Ne segue l'uguaglianza tra i numeri di allecciamento.

Esempio:

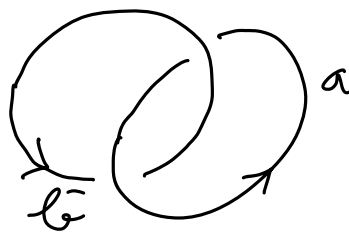
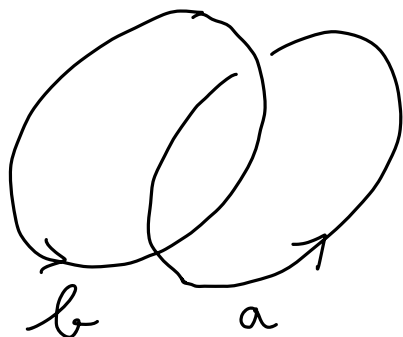


	a	b
a	-1	0
b	$+1$	-1

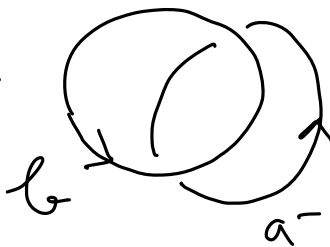


$$lk(a^-, a) = -1$$

$$lk(b^-, b) = -1$$



$$lk(b^-, a) = +1$$



$$lk(a^-, b) = 0$$

Fissata una base $\{[f_i]\} \subset H_1(F)$,

$A = (A_{ij} = \alpha([f_i], [f_j]))$ è

la **matrice di Seifert** associata a $(F, \{[f_i]\})$.

Nell'esempio sopra $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice di Seifert è utile per calcolare diversi invarianti fondamentali.

Il modulo di Alexander

Dato un link $L \subset S^3$ con intorno tubolare V , costruiamo:

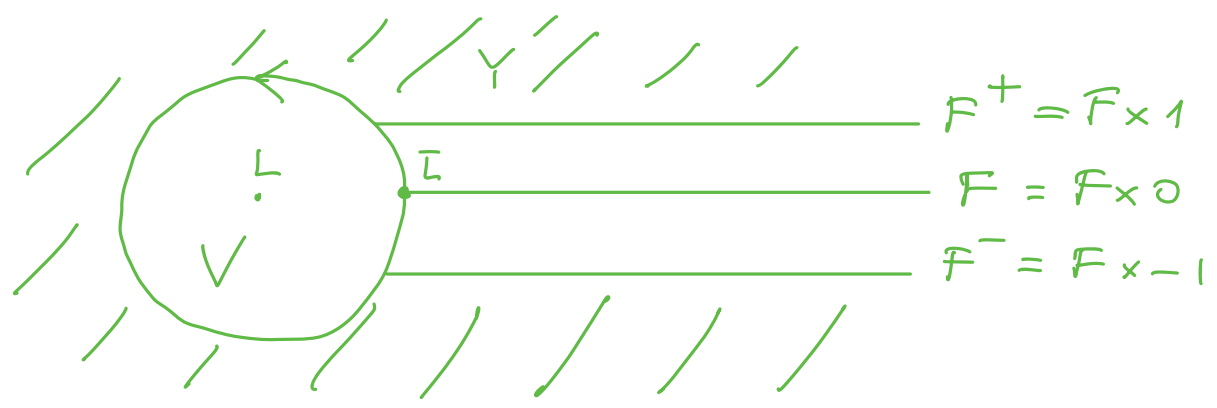
- un rivestimento $X_\infty \rightarrow X_L := S^3 \setminus V$
- un'azione $\mathbb{Z} \times X_\infty \rightarrow X_\infty$ tramite automorfismi di rivestimento.

L'invariante è $H_1(X_\infty)$ dotato dell'azione indotta di $\mathbb{Z}$.

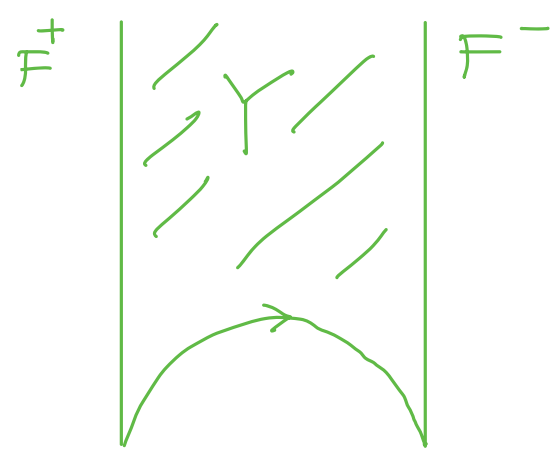
$L \subset S^3$ ^{orientato} link_Λ , $F \subset S^3$ superficie di Seifert.

$V =$ intorno tubolare di L , $X_L := \overline{S^3 \setminus V}$.

$N(F) \approx F \times [-1, 1] \subset X_L :$

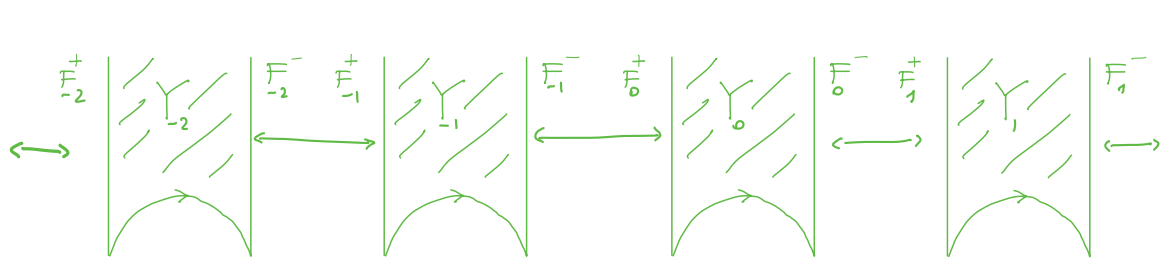


$Y := \overline{X_L \setminus N(F)}$



Sia $Y_i \approx Y$, $i \in \mathbb{Z}$ e

$X_\infty := \coprod_{i \in \mathbb{Z}} Y_i / \sim :$



$\mathbb{Z}$ agisce su X_∞ per "traslazioni" :

$n: X_\infty \rightarrow X_\infty$ manda l'immagine di Y_i in quella di Y_{i+n} . Chiaramente $X_\infty/\mathbb{Z} \approx X_L$.

Inoltre, la mappa indotta $\varphi: X_\infty \rightarrow X_L$

è un rivestimento. Fissiamo $x_0 \in Y_0$.

Allora $P_* \pi_1(X_\infty, x_0) \subset \pi_1(X_L, \varphi x_0)$

è il "sottogruppo del rivestimento"; consiste

delle classi dei cammini chiusi in X_L da

φx_0 a φx_0 i cui sollevamenti in X_∞ con

punto iniziale x_0 sono chiusi.

Sia m_i = meridiano orientato di L_i , $i=1, \dots, n$. ①

$H_1(X_L) = \langle [m_i] \rangle$. Sia $\varphi: \pi_1(X_L, p x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$
l'omomorfismo ottenuto componendo Hurwitz
con l'omomorfismo $H_1(X_L) \rightarrow \mathbb{Z}$ che manda
ogni $[m_i]$ in 1.

Vogliamo verificare: $p_* \pi_1(X_\infty, x_0) = \text{Ker } \varphi$

$\gamma \in H_1(X_L)$: immagine delle classe di un

cammino $\alpha: [0,1] \rightarrow X_L$, $\alpha(0) = \alpha(1) = p x_0$.

A meno di omotopia possiamo supporre che α

parametrizzi c.s.c. orientata $C \subset X_L$.

$$\Rightarrow \gamma = [C] = \sum_{i=1}^n k_i [m_i] \in H_1(X_L), \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Osserviamo che} & H_1(X_L) & \longrightarrow H_1(S^1 L_i) \\ & [C] & \longmapsto k_i [m_i] \end{array}$$

$$\text{quindi } k_i = \ell k(C, L_i).$$

(2)

Se G = superficie di Seifert per C ,

$$G \cap L = \{P_1, \dots, P_k\}, \quad D_i \subset G$$

dischetti intorno ai P_i , $G \setminus \bigcup_i D_i$ dà

un'omologia in X_L tra C e un'unione di

meridiani di L , mostrando che

$$\#(G \cap L) = \sum_{i=1}^n k_i = \varphi(\gamma) \quad \text{Ma}$$

$$\#(G \cap L) = \#(C \cap F), \quad \text{dove}$$

↑
come nel caso dei nodi

F = superficie di Seifert per L . $\Rightarrow$

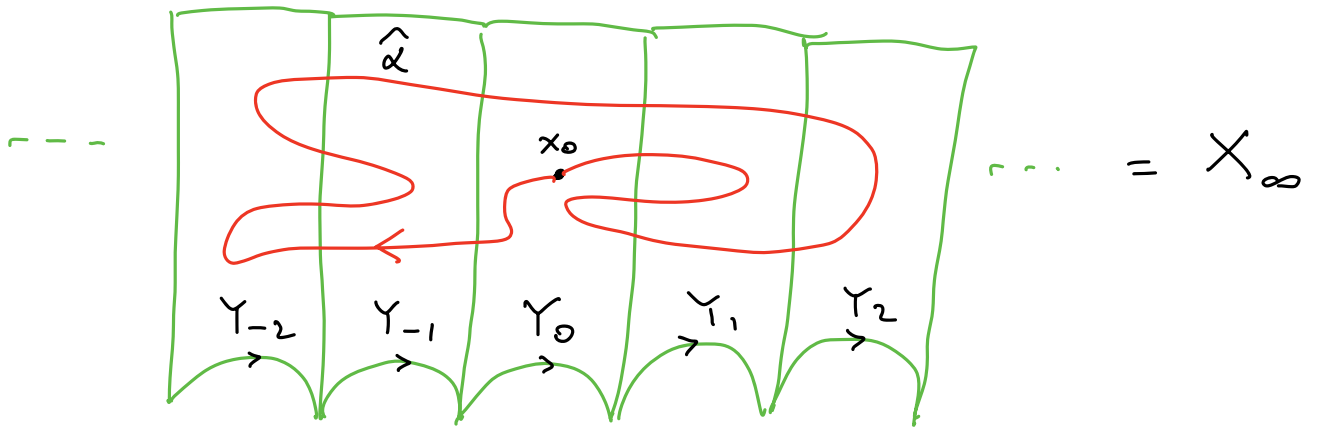
$$\varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^n k_i = \#(C \cap F).$$

Ora consideriamo $\hat{\alpha}: [0,1] \rightarrow X_\infty$:
l'unico sollevamento di α con punto
iniziale $x_0 \in Y_0$.

(3)

Il fatto che $\varphi(\alpha) = \#(C \cap F)$

dice $\varphi(\alpha) = 0 \iff \hat{\alpha}(1) = x_0 :$



Questo implica che $p_* \pi_1(X_\infty, x_0)$

è proprio $\text{Ker } \varphi$. Notiamo che,

poiché $\varphi(\alpha) = \#(C \cap F) = \#(G \cap L) = \sum_{i=1}^n k_i$

non dipende da F , nemmeno

X_∞ dipende da F , a meno di

isomorfismi di rivestimento. Ma

è vero qualcosa di più forte. Sia $F' \subset S^3$

(4)

un'altra superficie di Seifert per L

e $p': X'_\infty \rightarrow X_L$ il rivestimento

con $\mathbb{Z}$ -azione costruito come fatto con F .

Proposizione: esiste un omeomorfismo

$\tilde{p}: X_\infty \rightarrow X'_\infty$ tale che:

$$(1) \quad p' \circ \tilde{p} = p$$

$$(2) \quad \tilde{p}(t \cdot x) = t \cdot \tilde{p}(x)$$

$\forall x \in X_\infty$, dove t rappresenta il generatore dell'azione di $\mathbb{Z}$ sia su X_∞ che X'_∞ .

Dimostrazione: sia $x_0 \in X_\infty$ e $x'_0 \in X'_\infty$

con $p'x'_0 = px_0$. Sia $\tilde{p}: X_\infty \rightarrow X'_\infty$

l'unico sollevamento a X'_∞ delle

proiezione $p: X_\infty \rightarrow X_L$ con $\tilde{p}x_0 = x'_0$. (5)

(Esiste: $p_* \pi_1(X_\infty, x_0) = p'_* \pi_1(X'_\infty, x'_0)$).

Allora (1) vale per costruzione.

Ora sia $x \in X_\infty$ e $\gamma: [0, 1] \rightarrow X_\infty$

un cammino da x a tx . Notiamo

che $p \circ \gamma$ è un cammino chiuso perché

ha punto iniziale $p(\gamma(0)) = p(x)$ e punto

finale $p(\gamma(1)) = p(tx) = p(x)$. $\Rightarrow$

$$\varphi([p \circ \gamma]) = 1 = \varphi'([p \circ \gamma]).$$

Inoltre,

$\tilde{p} \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow X'_\infty$ è un cammino da

$\tilde{p}x$ a $\tilde{p}(tx)$ e solleva $p \circ \gamma$:

$$p' \circ (\tilde{p} \circ \gamma) = (p' \circ \tilde{p}) \circ \gamma = p \circ \gamma$$

(6)

Dunque $\tilde{p}(tx) = t \cdot \tilde{p}x$, e vale (2). ☒

L'azione di $\mathbb{Z}$ su X_∞ tramite omeomorfismi
 ne induce una su $H_1(X_\infty)$, che diventa
 un modulo sull'anello $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$
 del gruppo $\mathbb{Z}$.

Osservazione: Poiché l'anello $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ non è
 a ideali principali, non esiste un semplice
 teorema di struttura per R -moduli.

Ciononostante, vedremo che è possibile
 darne una presentazione finita
 tramite una matrice di Seifert.

Definizione: il modulo di Alexander di L è la classe di isomorfismo di $H_1(X_\infty)$ come $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modulo.

Brevi richiami sui moduli finitamente presentati.

Siano: R = anello commutativo unitario,
 M = R -modulo.

Una presentazione finita di M è una successione esatta di R -moduli

$$R^m \xrightarrow{A} R^n \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0,$$

dove $A \in M_{n \times m}(R)$. A = "matrice di presentazione" di M .

Teorema (Lickorish, teo. 6.1)

Date due matrici di presentazione A, A' per un R -modulo M , A ed A' si ottengono una dall'altra tramite una successione finita delle seguenti mosse

e delle loro inverse:

(8)

(i) operazioni elementari tra righe e colonne;

(ii)

$$A \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 & \dots & 0 \end{smallmatrix} & 1 \end{array} \right)$$

(iii)

$$A \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline A & \end{array} \right)$$



Definizione: sia $M = R$ -modulo ed

$A \in M_{m \times n}(R)$ una sua matrice di

presentazione. L' R -esimo ideale elementare

$\mathcal{E}_2 \subset R$ di M è l'ideale generato

dai minori quadrati di A di ordine $m+1-r$

$$(0) =: \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{E}_{m+1} := R$$

OSS: 1) $m = n \Rightarrow \mathcal{E}_1 = (\det A)$,
 $\mathcal{E}_2 =$ ideale generato dai minori $(m-1) \times (m-1)$, etc....

2) Il teorema implica che gli ideali elementari non dipendono dalla scelta di una presentazione di un R -modulo M , e quindi sono invarianti di M .

Teorema $L \subset S^3$ link, $F \subset S^3$ sup. di Seifert,

$A =$ matrice di Seifert rispetto a qualche

basis di $H_1(F) \Rightarrow tA - {}^tA$ è una

matrice di presentazione di $H_1(X_\infty)$ come

$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modulo.

DEF.: L' r -esimo ideale di Alexander di un link $L \subset S^3$ è l' r -esimo ideale elementare di $H_1(X_\infty)$.

Osservazione: poiché le matrici di Seifert sono quadrate, il 1° ideale di Alexander è sempre principale. Un suo generatore a meno di invertibili è il polinomio di Alexander $\Delta_L(t)$ di L .

Quindi $\Delta_L(t) := \det(tA - {}^tA) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Esercizio: gli invertibili di $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ sono gli elementi $\pm t^a$, $a \in \mathbb{Z}$.

dim. del teorema : $tA - {}^tA$ presenta $H_1(X_\infty)$. ①

Scriviamo $X_\infty = Y' \cup Y''$, dove

$$Y' := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} t^{2i} \cdot Y_0, \quad Y'' := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} t^{2i+1} \cdot Y_0.$$

La presentazione è data dalla seguente

porzione della successione esatta di M-V :

$$(*) \quad H_1(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \xrightarrow{\beta_*} H_1(X_\infty).$$

Cominciamo a verificare : β_* surgettiva

Per farlo studiamo la mappa successiva

nella successione di M-V : $\bar{p} \in \bar{F}_0$

$$\begin{array}{ccccc} H_0(Y' \cap Y'') & \xrightarrow{\gamma_*} & H_0(Y') \oplus H_0(Y'') & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_0(t^i \cdot \bar{F}_0^-) & & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_0(t^{2i} \cdot Y_0) \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_0(t^{2i+1} \cdot Y_0) & & \\ \parallel & & \underbrace{\hspace{10em}} & & \\ \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \langle [\bar{p}] \rangle & & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_0(t^i \cdot Y_0) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \langle \bar{p} \rangle & & \end{array}$$

$F_0^- \hookrightarrow Y_0$: mappe di inclusione (2)
 $\downarrow \quad \downarrow t^i$ commutano con l'azione di t^i
 $t^i F_0^- \hookrightarrow t^i Y_0 \Rightarrow \gamma_*$ omomorfismo di $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -moduli.

$$\gamma_*([p^-]) = (-[p^-], t \cdot [p^-]) \neq 0 :$$

$$p \in X \Rightarrow [p] \neq 0 \in H_0(X) \text{ (esercizio).}$$

$$\Rightarrow \gamma_* \text{ iniettiva} \Rightarrow \beta_* \text{ surgettiva.} \quad \checkmark$$

Ora studiamo la mappa :

$$H_1(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$$

$$Y' \cap Y'' = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} t^i \cdot F_0^- \Rightarrow \text{azione involta in omologia}$$

$$H_1(Y' \cap Y'') = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_1(t^i F_0^-) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} t^i \cdot H_1(F_0^-)$$

$$\Rightarrow H_1(Y' \cap Y'') \text{ è uno } \mathbb{Z}[t, t^{-1}]\text{-modulo libero}$$

generato da una base di $H_1(F_0^-)$.

$$\text{Analogamente, } H_1(Y') = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} t^{2i} H_1(Y_0),$$

$$H_1(Y'') = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} t^{2i+1} H_1(Y_0)$$

(3)

$$\Rightarrow H_1(Y') \oplus H_1(Y'') = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} t^i \cdot H_1(Y_0)$$

è uno $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modulo libero generato da una base di $H_1(Y_0)$.

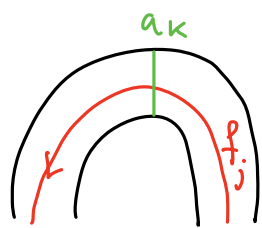
mappe di inclusione commutano con l'azione

di $t^i \Rightarrow \alpha_*$ omomorfismo di

$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -moduli.

Fissiamo una base $\{[f_j^-]\} \subset H_1(F_0^-)$

e una base $\{[e_k]\} \subset H_1(Y_0)$:

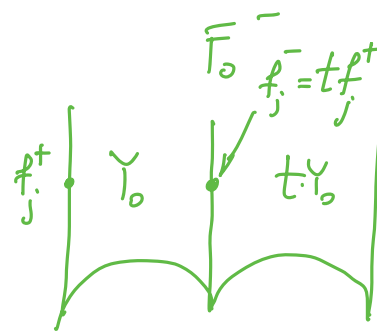


= banda su F_0 , $e_k = \partial(a_k \times [-1, 1])$

$$\ell_k(e_k, f_i) = \delta_{ki}.$$

$$H_1(Y' \cup Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$$

$$\alpha_*([f_j^-]) = \underbrace{(-[f_j^-])}_{H_1(Y_0)}, \underbrace{t \cdot [f_j^+]}_{t \cdot H_1(Y_0) = H_1(tY_0)}$$



$$H_1(Y_0) \quad t \cdot H_1(Y_0) = H_1(tY_0)$$

(4)

$$= -[f_j^-] + t \cdot [f_j^+] \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \cdot H_1(Y_0)$$

$$[f_j^-] = \sum_k a_{kj} [e_k]$$

$$\Rightarrow a_{ij} = \beta([f_j^-], [f_i]) = A_{ji} = {}^t A_{ij}$$

$$\Rightarrow [f_j^-] = \sum_k {}^t A_{kj} [e_k]$$

$$[f_j^+] = \sum_k b_{kj} [e_k]$$

$$\Rightarrow b_{ij} = \beta([f_j^+], [f_i]) = A_{ij}$$

$$\Rightarrow [f_j^+] = \sum_k A_{kj} [e_k]$$

$\Rightarrow$ matrice di α_* , come mappa di

$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -moduli, rispetto alle basi $\{[f_j^-]\}$ e

$$\{[e_k]\} : tA - A^t$$

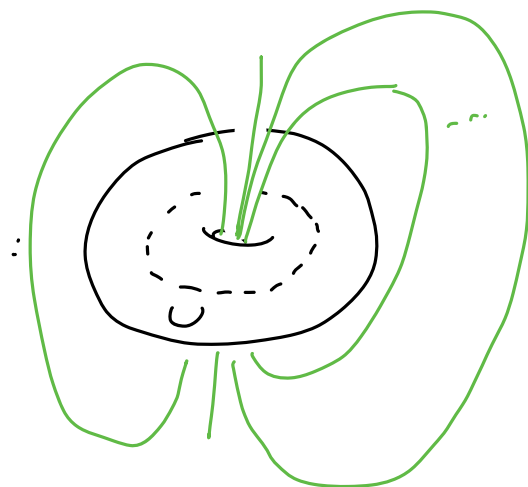


Vediamo alcuni esempi:

1) $U = \text{nodo banale}$.

$$X_U = \overline{S^3 \setminus U} \approx S^1 \times D^2$$

In fatti:



$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

$$= \pi_1 \cup \pi_2$$

$$= \left\{ |z_1|^2 \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ |z_1|^2 \geq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} (z_1, z_2) & & \\ \downarrow & \varphi \downarrow \cong & \\ (\sqrt{2}z_1, \frac{z_2}{|z_2|}) & & \end{array}$$

$$D^2 \times S^1$$

$$\downarrow \cong$$

$$S^1 \times D^2$$

$$\begin{array}{ccc} (z_1, z_2) & & \\ \downarrow & & \\ (\frac{z_1}{|z_1|}, \sqrt{2}z_2) & & \end{array}$$

$$(\frac{z_1}{|z_1|}, \sqrt{2}z_2)$$

$$\varphi^{-1}: (z, e^{i\theta}) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z, (1 - \frac{1}{2}|z|^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} \right)$$

Inoltre, $\mathcal{S} := \{(0, z_2) \in S^3\} \subset \pi_1 \subset S^3$

è il cuore di Π_1 e bordo il disco: ⑥

$$\mathbb{D} := \bigcup_{0 \leq r \leq 1} \{(z, z_2) \mid r^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset S^3$$

$$\begin{array}{ccc} & (r, z_2) & (\sqrt{1-|z_2|^2}, z) \\ & \downarrow & \uparrow \\ \mathbb{D}^2 & z_2 & z \end{array}$$

Costruiamo X_∞ : Sia $\mathcal{D} \subset X_\cup \approx S^1 \times \mathbb{D}^2$ un disco meridiano. $X_\cup \setminus N(\mathcal{D}) \approx I \times \mathbb{D}^2$,

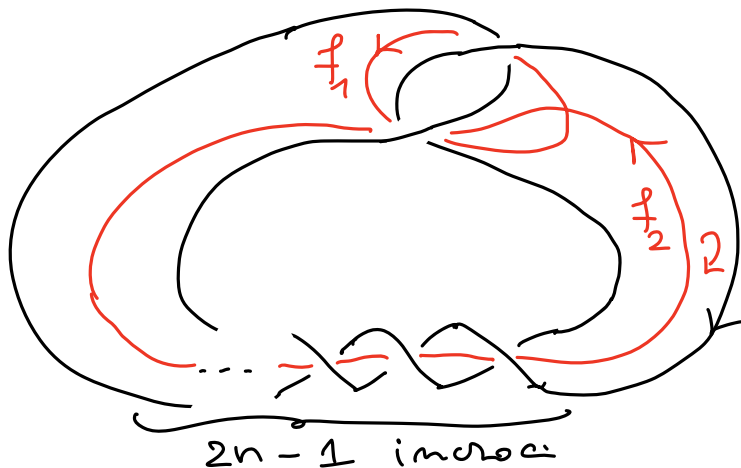
$$X_\infty = \cdots - \text{[diagram of two squares]} - \cdots \approx \mathbb{R} \times \mathbb{D}^2 \text{ è contrattile}$$

$$\Rightarrow H_1(X_\infty) = 0 \Rightarrow \text{presentazione:}$$

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{(1)} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Delta_\cup(t) \doteq 1 \quad \text{"a meno di unit ".}$$

2)



$$=: K_n, n \in \mathbb{Z}$$

odi "twist"

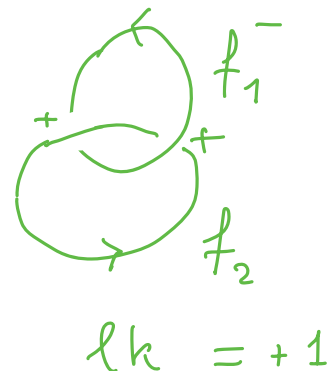
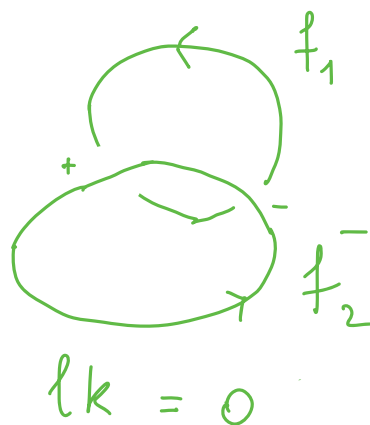
$2n-1 \geq 0$:

$$2n-1 < 0 : \dots \underbrace{\quad \quad \quad}_{|2n-1| \text{ incroci}}$$

(7)

matrice di Seifert :

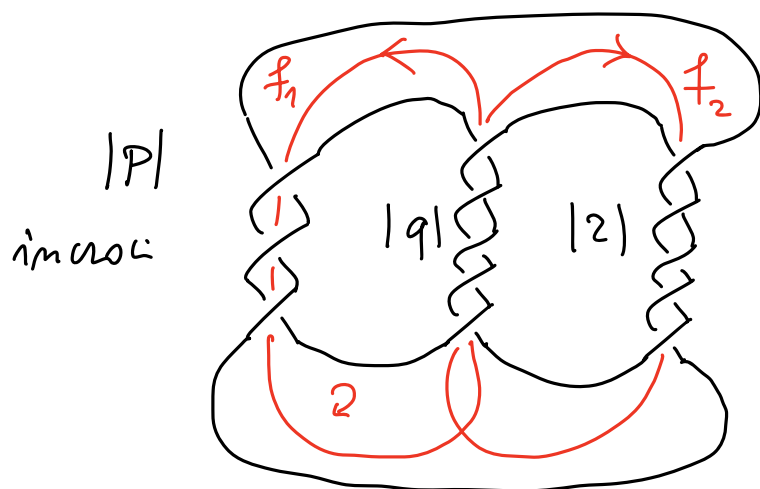
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \ell_1 & \ell_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$\begin{aligned} tA - {}^tA &= t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -1 & (n-1)(t-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

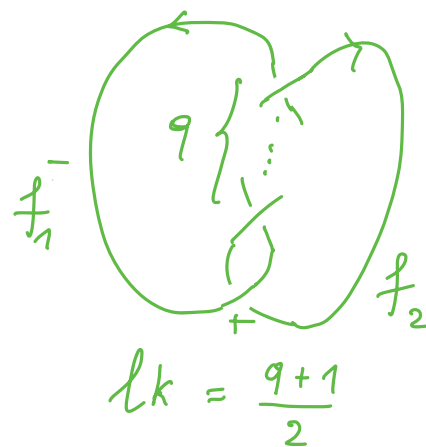
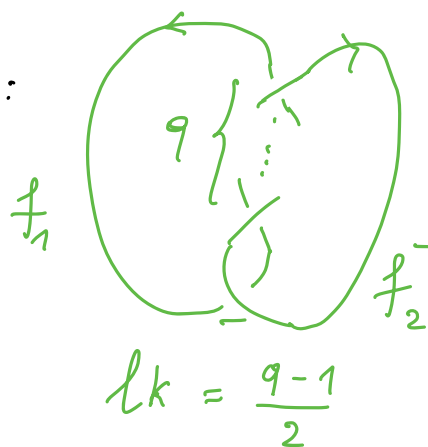
$$\Delta_{K_n}(t) = \det(tA - {}^tA) = (1-n)(t^2 - 2t + 1) + t$$

3) p, q, r dispari, $P(p, q, r) = \text{modo pretzel}$



r incroci come in figura se $r \geq 0$,
 $|r|$ incroci scambiati se $r < 0$, lo stesso per p e q .

Matrice di Seifert:



$$A = \begin{matrix} & f_1 & f_2 \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{p+q}{2} & \frac{q+1}{2} \\ \frac{q-1}{2} & \frac{q+1}{2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\Delta_{P(p,q,r)}(t) \doteq \det(tA - {}^tA) =$$

$$\det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (p+q)(t-1) & q(t-1) + t+1 \\ q(t-1) - (t+1) & (q+r)(t-1) \end{pmatrix} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{4} \left((pq + qr + pr)(t-1)^2 + (t+1)^2 \right)$$

OSS: 1) $\Delta_{P(-3,5,7)}(t) \doteq \frac{1}{4} \left((-15 + 35 - 21)(t^2 - 2t + 1) + t^2 + 2t + 1 \right)$

$= t \doteq 1 \Rightarrow$ il polinomio di Alexander non distingue $P(-3,5,7)$ da U .

2)

①

$$\Delta_{P(3,3,-3)}(t) \doteq \frac{1}{4} \left((9-9-9) \cdot (t^2-2t+1) + t^2+2t+1 \right) \\ = \frac{1}{4} (-8t^2 + 20t - 8) \doteq 2t^2 - 5t + 2.$$

Ma avevamo calcolato:

$$\Delta_{K_3}(t) \doteq (-2)(t^2-2t+1) + t \doteq 2t^2 - 5t + 2$$

Quindi K_3 e $P(3,3,-3)$ non sono
distinti dal polinomio di Alexander.

Verifichiamo che il secondo ideale di
Alexander li distingue.

$$A_{P(3,3,-3)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A_P$$

$$t A_P - {}^t A_P = \begin{pmatrix} 3(t-1) & 2t-1 \\ t-2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma_2(P(3,3,-3)) = \begin{pmatrix} 3t-3, & 2t-1, & t-2 \\ \text{"} \\ (2t-1)+(t-2) \end{pmatrix}$$

$$= (2t-1, t-2) \neq \mathbb{Z}[t, t^{-1}] :$$

Se $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$ è l'unico

omorfismo di anelli che manda $t \mapsto -1$:

$$\Sigma_2(P) \mapsto (3) \subsetneq \mathbb{Z}$$

D'altronde, ${}^t A_{K_3} - {}^t A_{K_3} = \begin{pmatrix} * & * \\ -1 & * \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Sigma_2(K_3) = (1) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] .$$

$$\Rightarrow \Sigma_2(P) \neq K_3 \neq P(3,3,-3) .$$

Ora verifichiamo alcune importanti

proprietà del polinomio di Alexander:

③

Teorema: $L \subset S^3$ link orientato $\Rightarrow$

$$(a) \quad \Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t^{-1})$$

$$(b) \quad \Delta_L(1) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } |L| = 1 \\ 0 & \text{se } |L| > 1 \end{cases}$$

n. componenti
di L

Dim: (a) Supponiamo $A \in M_n(\mathbb{Z})$

matrice di Seifert.

$$\det(tA - {}^tA) = \det(t {}^tA - A)$$

$$= (-1)^n \det(A - t {}^tA) = (-t)^n \det(t^{-1}A - {}^tA)$$

$$\doteq \Delta_L(t^{-1}).$$

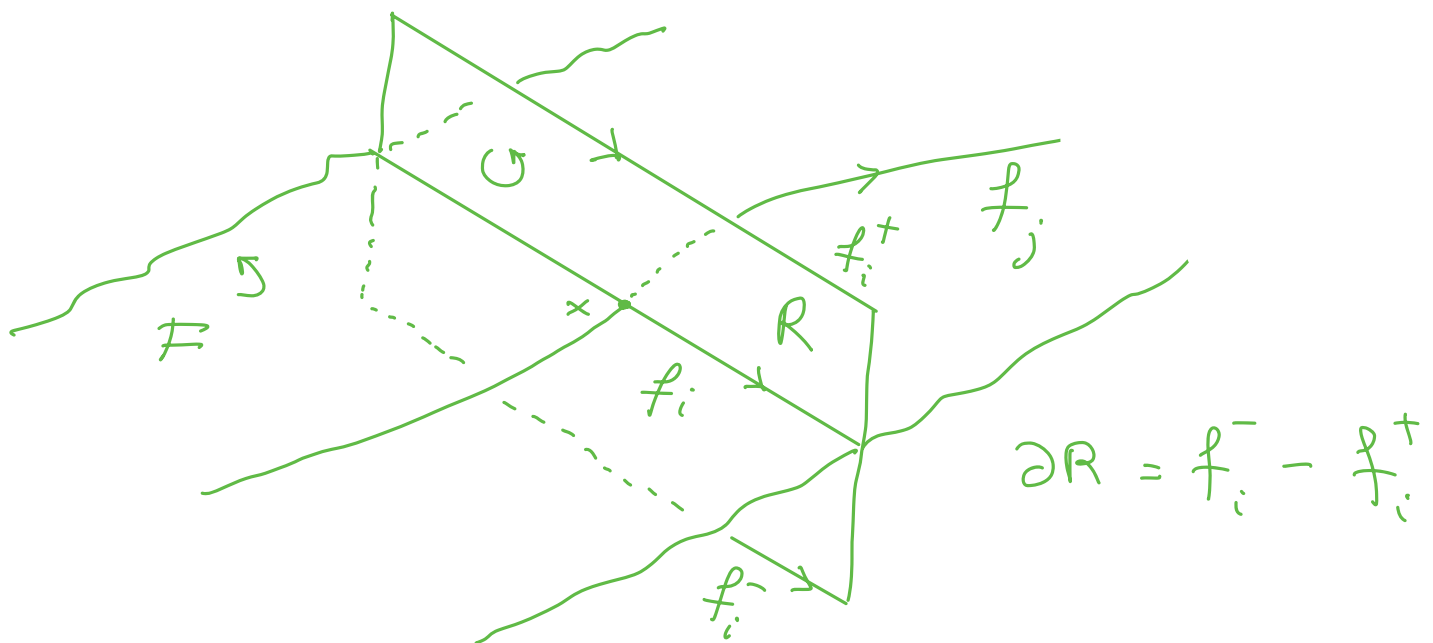
$$(b) \quad \Delta_L(1) = \pm \det(A - {}^tA)$$

$F = F_{g,r}$ superficie di Seifert,

$\{[f_i]\} \subset H_1(F)$ base.

$$(A - {}^tA)_{ii} = 0; \quad \text{se } i \neq j :$$

$$\begin{aligned}
 (A - {}^t A)_{ij} &= \text{lk}(f_i^-, f_j) - \text{lk}(f_j^-, f_i) \\
 &= \text{lk}(f_i^-, f_j) - \text{lk}(f_i^+, f_j) \\
 &= \beta([f_i^-] - [f_i^+], f_j) = (*)
 \end{aligned}$$

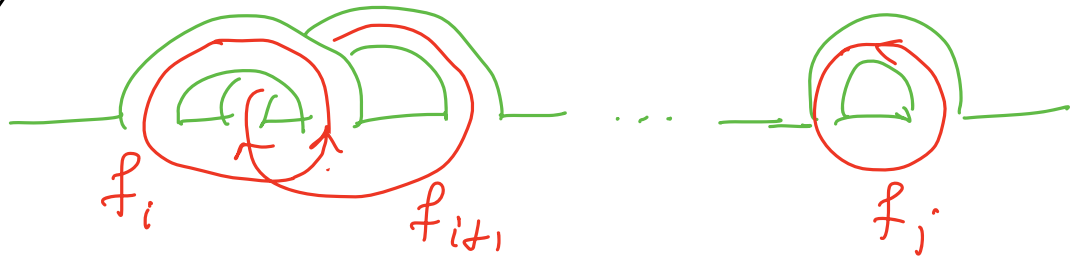


$$(*) = \beta([f_i^-] - [f_i^+], f_j)$$

$$= \#(R \cap f_j) = -f_i \cdot f_j \quad \leftarrow \text{intersezioni con segno}$$

Possiamo scegliere le f_i in modo che la matrice di intersezione su F sia una somma di g blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ più } |L| = 1 \text{ blocchi } (0): \quad (5)$$



Questo implica: $\det(A - {}^t A) = 0$
 se $|L| > 1$, $= \pm 1$ se $|L| = 1$. $\square$

Corollario: $K \subset S^3$ nodo $\Rightarrow$
 $\Delta_K(t) \doteq a_0 + a_1 \left(t + \frac{1}{t}\right) + a_2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \dots$

con a_0 dispari.

dim: Sappiamo:

$$\Delta_K(t) \doteq b_0 + b_1 t + \dots + b_N t^N \Rightarrow$$

$$\Delta_K(t^{-1}) \doteq b_0 + \frac{b_1}{t} + \dots + \frac{b_N}{t^N}.$$

$$\text{Quindi } \Delta_K(t) \doteq \Delta_K(t^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$b_0 = \pm b_N, b_1 = \pm b_{N-1}, \dots : b_i = \pm b_{N-i}, i = 0, \dots, N$$

$$\Rightarrow b_i \equiv b_{N-i} \pmod{2} \quad \forall i = 0, \dots, N$$

$$\Delta_K(1) = \pm (b_0 + b_1 + \dots + b_N) \equiv \begin{cases} 0, & N \text{ dispari} \\ b_{N/2}, & N \text{ pari.} \end{cases} \pmod{2} \quad (6)$$

$$\Delta_K(1) = \pm 1 \Rightarrow N \text{ pari, } b_{N/2} \text{ dispari} \Rightarrow \\ \Rightarrow b_i = b_{N-i} \quad \forall i, \text{ altrimenti } b_{N/2} = -b_{N/2} \Rightarrow b_{N/2} = 0 (\Rightarrow \neq)$$

$$\Rightarrow \Delta_K(t) \doteq a_0 + a_1 \left(t + \frac{1}{t} \right) + a_2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) + \dots$$

$$a_0 \text{ dispari. } \boxed{\times}$$

Esercizio: Dimostrare che

$$(1) \Delta_{m(L)}(t) \doteq \Delta_L(t) \text{ e } \Delta_{r(L)}(t) \doteq \Delta_L(t)$$

per ogni link orientato $L \subset S^3$, e

$$(3) \Delta_{K_1 \# K_2}(t) \doteq \Delta_{K_1}(t) \Delta_{K_2}(t)$$

per ogni $K_1, K_2 \subset S^3$ nodi.

Oss.: $L \subset S^3$ link con $|L|$ componenti,

$F \subset S^3$ superficie di Seifert, $g = g(F)$

(7)

$\Rightarrow$ matrice di Seifert $(2g + |L| - 1) \times (2g + |L| - 1)$

$$\Rightarrow \deg(tA - {}^tA) \leq 2g + |L| - 1 \Rightarrow$$

$$2g_3(L) + |L| - 1 \geq \text{ampiezza}(\Delta_L(t)).$$

Vale la pena conoscere il seguente risultato:

Teorema (Crowell): $D = \text{diagramma}$
 alternante di link $L \subset S^3 \Rightarrow$
 $\text{ampiezza}(\Delta_L(t)) = 2g_{F_D} + |L| - 1,$

dove $F_D :=$ è la superficie ottenuta da D
 applicando l'algoritmo di Seifert.

Abbiamo visto che per un nodo $K \subset S^3$ si ha
 sempre $\Delta_K(t) \neq 0$. Questo non vale
 necessariamente per un link:

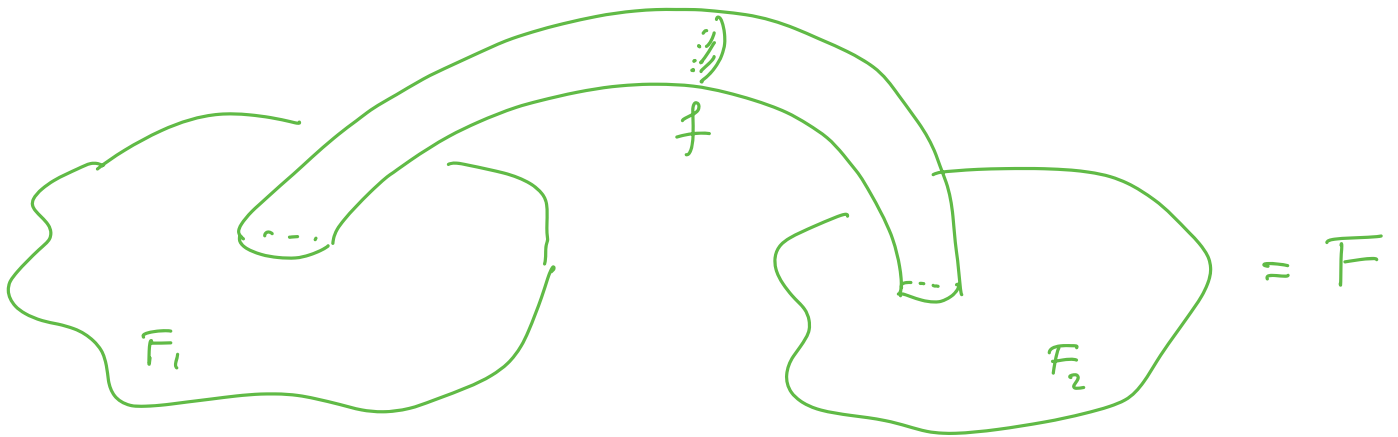
DEF: Un link $L \subset S^3$ si dice **split** se
 ha un diagramma scomesso.

Proposizione $L \subset S^3$ link split

$$\Rightarrow \Delta_L(t) = 0.$$

dim: si vede facilmente che L ammette una superficie di Seifert scomessa.

Inoltre, date due superfici orientate, con bordo F_1, F_2 con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, possiamo connetterle con un tubo (intorno tubolare di un arco) in modo da ottenere una superficie connessa e orientata F :



$\Rightarrow$ possiamo supporre $L = \partial F_1 \cup \partial F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, F_1, F_2 connesse.

Notiamo che $F \approx (F_1 \setminus D_1) \cup_{\partial D_1 = \partial D_2} (F_2 \setminus D_2)$.

$D_i \subset F_i$, $i=1,2$ disco. La successione di MV della decomposizione $F_i = (F_i \setminus D_i) \cup D_i$

fornisce : $H_2(F_i) = 0$ se $\partial F_i \neq \emptyset$: già visto

(9)

$$0 \rightarrow H_1(\partial D_i) \rightarrow H_1(F_i \setminus D_i) \oplus H_1(D_i) \rightarrow H_1(F_i) \rightarrow 0$$

iniettiva

$$\rightarrow H_0(\partial D_i) \rightarrow H_0(F_i) \oplus H_0(D_i)$$

$$\Rightarrow H_1(F_i \setminus D_i) \cong H_1(F_i) \oplus \langle [\partial D_i] \rangle, i=1,2.$$

Ora consideriamo la successione di MN della decomposizione $F = (F_1 \setminus D_1) \cup (F_2 \setminus D_2)$:

$$[f] \longmapsto ([\partial D_1], [\partial D_2])$$

$$0 \rightarrow H_1(\partial D_1 = \partial D_2) \rightarrow H_1(F_1 \setminus D_1) \oplus H_1(F_2 \setminus D_2) \rightarrow H_1(F) \rightarrow 0$$

iniettiva

$$\rightarrow H_0(\partial D_1 = \partial D_2) \rightarrow H_0(F_1 \setminus D_1) \oplus H_0(F_2 \setminus D_2)$$

$$\Rightarrow H_1(F) \cong \underbrace{H_1(F_1) \oplus \langle \partial D_1 \rangle \oplus H_1(F_2) \oplus \langle \partial D_2 \rangle}_{\langle [\partial D_1] \pm [\partial D_2] \rangle}$$

$$\cong H_1(F_1) \oplus H_1(F_2) \oplus \langle [f] \rangle.$$

Poiché f bordo un disco disgiunto da $F_1 \cup F_2$, completando $[f]$ ad una base di $H_1(F)$ tramite basi di $H_1(F_1)$ e $H_1(F_2)$ si ottiene una base

di $H_1(\mathbb{F})$ con matrice di Seifert associata
della forma

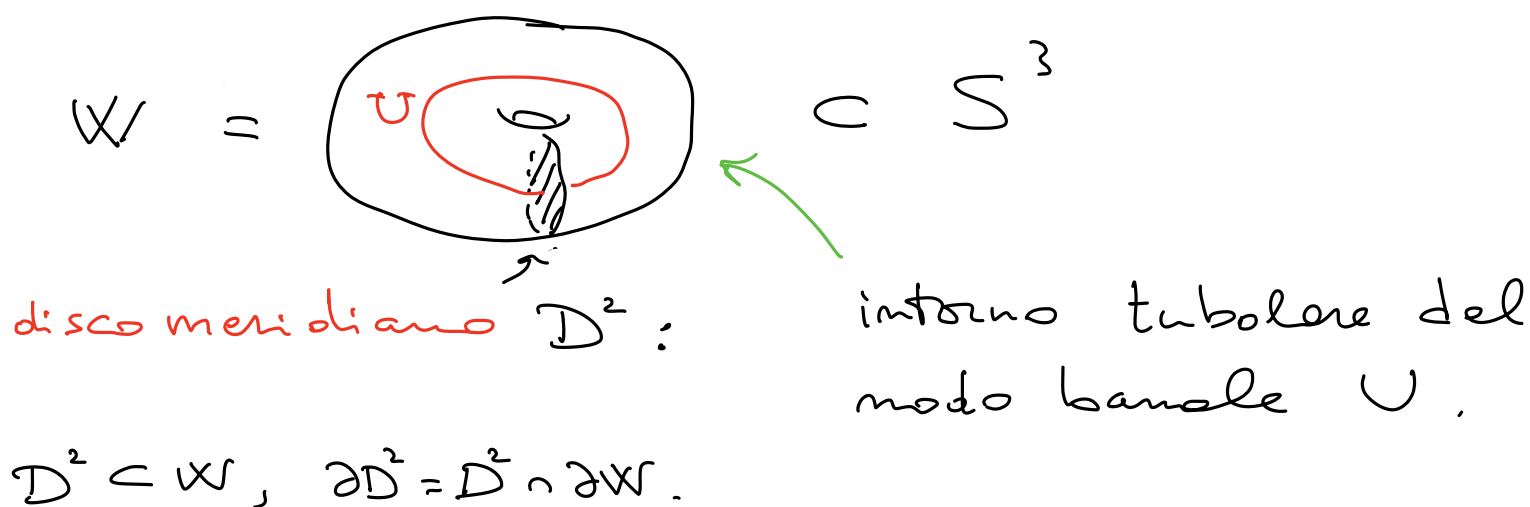
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f & \dots & \end{matrix} \\ \begin{matrix} f \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & * & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{matrix} . \text{ Di conseguenza}$$

$$\det(tA - {}^tA) = \Delta_2(t) = 0. \quad \square$$

①

Si possono costruire molti nodi con lo stesso polinomio di Alexander o nodi con polinomio di Alexander banale. Vediamo come.

Nodi satellite



C'è un omeomorfismo $S^1 \times D^2 \rightarrow W$

che manda $x \times D^2$ in un disco

meridiano $\forall x \in S^1$ e $S^1 \times y$ in una

longitudine canonica di $U \forall y \in \partial D^2$.

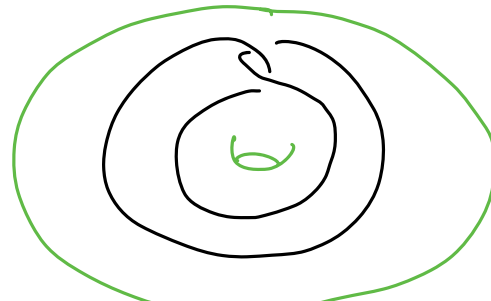
(2)

Identifichiamo $S^1 \times D^2$ con W tramite tale omeomorfismo (fatto: è unico a meno di isotopia).

Un nodo $P \subset W$ è **essenziale** se interseca ogni disco meridiano $D^2 \subset W$.

Esercizio: Usare il teorema di Crowell per dimostrare che, se $L :=$ , $\Delta_L(t) \neq 0$.

Poi usare questo fatto per dimostrare che

$P_0 :=$  è essenziale.

DEF: Dato un nodo $C \subset S^3$, sia $V =$ intorno tubolare di C e

$h: W \rightarrow V$ un omeomorfismo.

Se $P \subset W$ è essenziale,

$S = S(C, P) := h(P) \subset V$ si dice **satellite**

con **compagno** C e **pattern** P . Assumeremo sempre che h sia **fedele**, ovvero che mandi una longitudine canonica di W in una di V .

Verifichiamo che la fedeltà esiste sempre. (3)

Sia $D \subset \mathbb{C}$ il disco unitario e

$g: D \times [0,1] \rightarrow D \times [0,1]$ la mappa

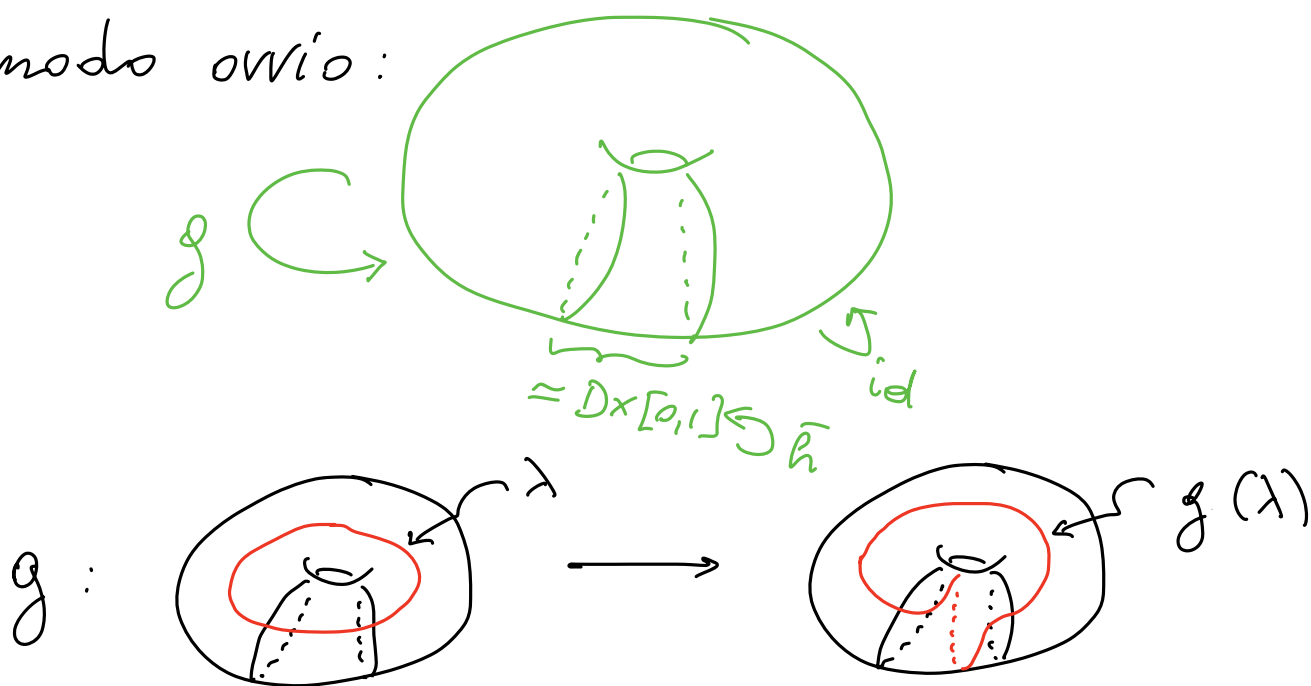
data da $g(re^{i\theta}, t) = (re^{i(\theta+2\pi t)}, t)$:

il disco $D \times \{t\}$ viene ruotato di $2\pi t$.

Ruotando nell'altro senso si ottiene g^{-1}

g si estende a un omeo. $f: D \times S^1 \rightarrow D \times S^1$

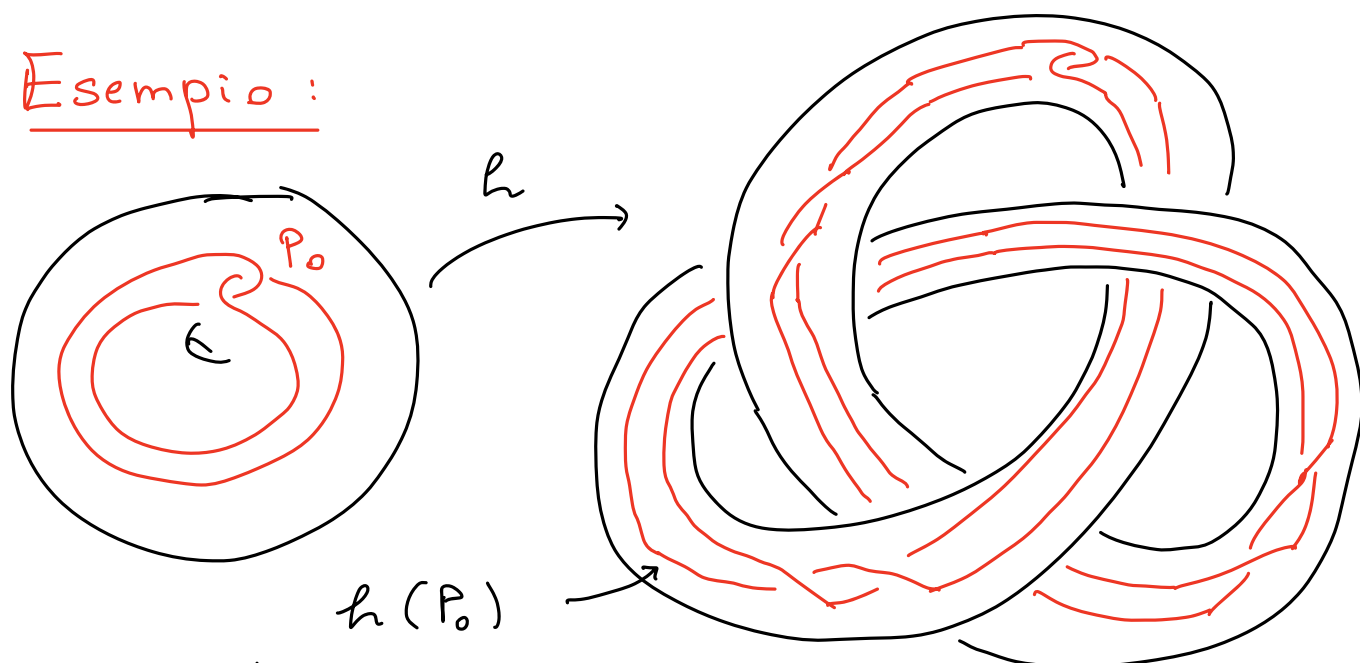
nel modo ovvio:



$\Rightarrow$ componendo con $g^k: V \rightarrow V$, $k \in \mathbb{Z}$, si può rendere fedele qualunque $h: W \rightarrow V$

Quando $P = P_0$, $S(C, P_0)$ si chiama
Whitehead double di C , e se h è fedele
untwisted Whitehead double.

Esempio:



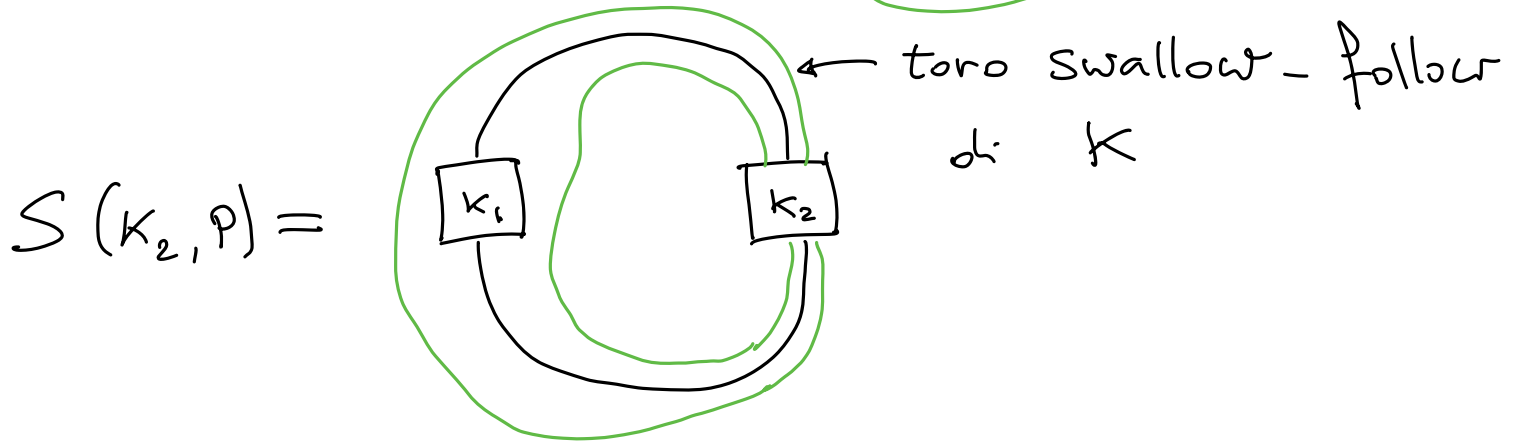
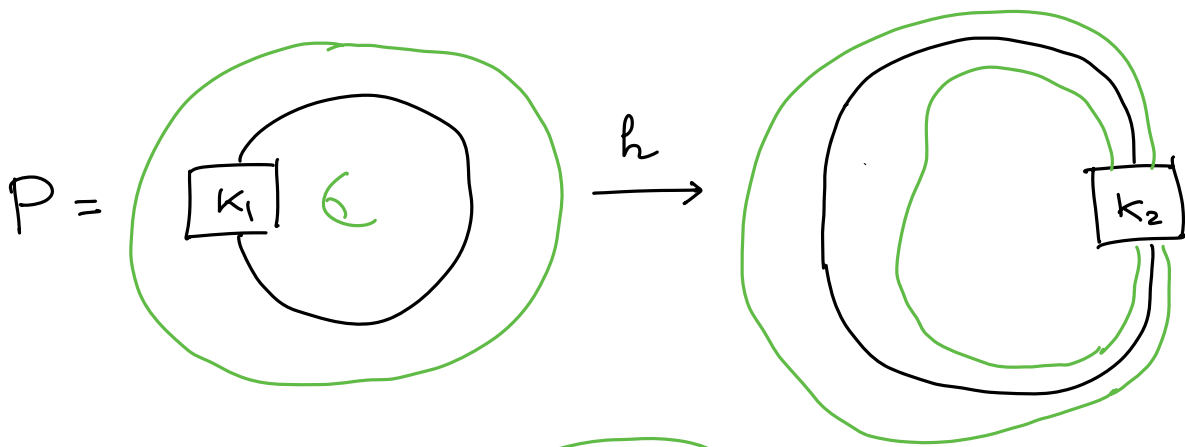
untwisted Whitehead double
 del trifoglio sinistro

Se $P = T_{p,q}$ = nodo torico di tipo $(p, q) \Rightarrow$
 $S = S(C, T_{p,q})$ è cable di C di tipo (p, q)
 $[(p, q) - \text{cable di } C]$.

Osservazione: Se $K = K_1 \# K_2$ nodo
 decomponibile, K è sia un satellite con
 compagno K_1 che con compagno K_2 .

Verifichiamolo ad esempio per K_2 :

(5)



Dato $P \subset W = S^1 \times D^2$. Se, fissata un'orientazione di P , $[P] = w \cdot [S^1 \times 0]$ in $H_1(W)$, w (definito a meno del segno) si dice **winding number** di P .

Teorema Se $P \subset W$ ha winding number w ,

$$\Delta_{S(C, P)}(t) \doteq \Delta_P(t) \cdot \Delta_C(t^w).$$

x

Corollario:

(1) $C_1, C_2 \subset S^3$ nodi con $\Delta_{C_1}(t) = \Delta_{C_2}(t)$
 $\Rightarrow \Delta_{S(C_1, P)}(t) \doteq \Delta_{S(C_2, P)}(t)$ per ogni P .

(6)

$$(2) \quad w(P_0) = 0 \quad e \quad \Delta_{P_0}(+) = 1$$

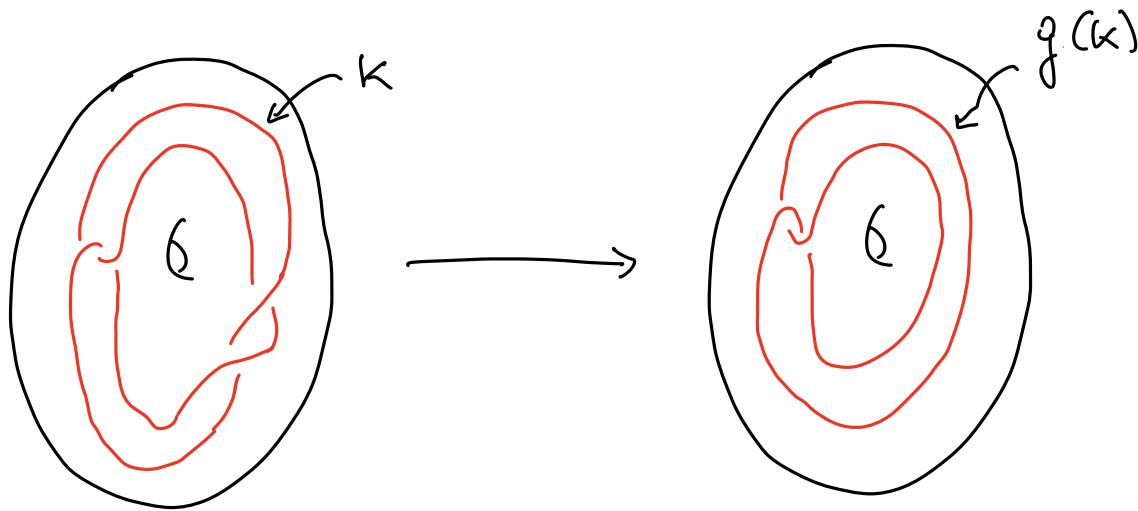
$$\Delta_{S(C, P_0)}(+) \doteq 1 \cdot \Delta_C(1) \doteq 1 \quad \forall C \subset S^3.$$

↑
questo è il doppio di Whitehead di C .

Unknotting number e ideali di Alexander

Sia $g: D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1$ l'omeomorfismo definito prima.

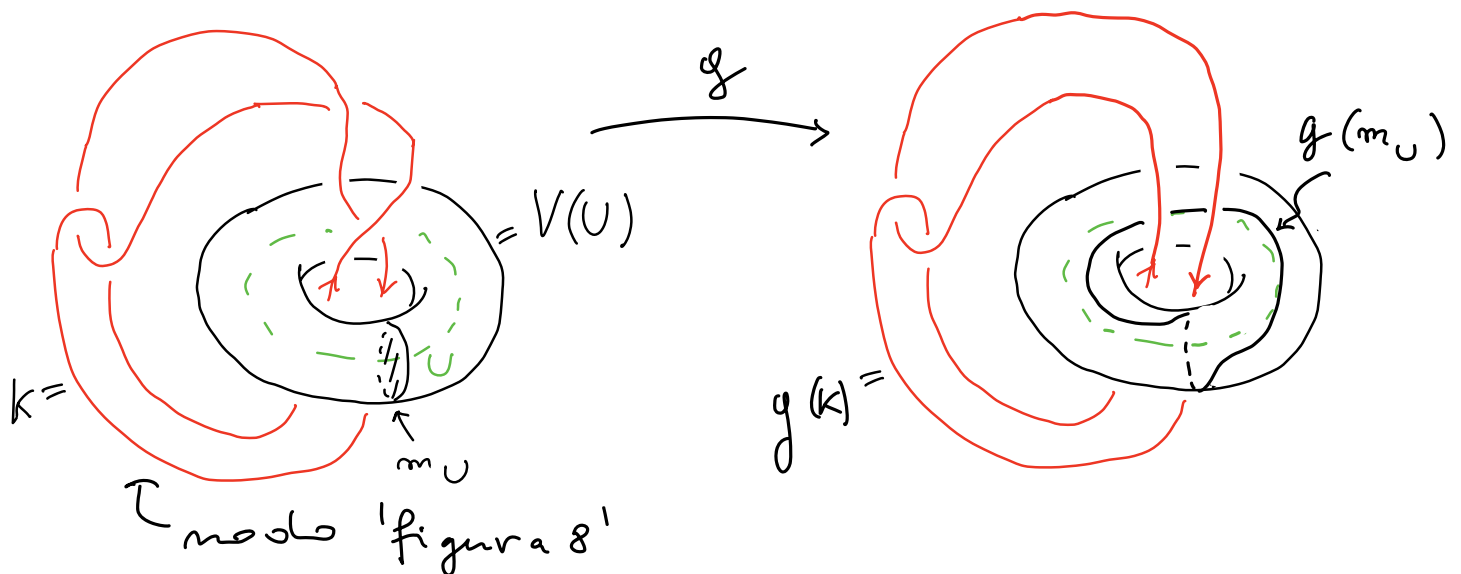
Applichiamo g al seguente modo $K \subset D \times S^1$



Abbiamo visto

$$S^3 = \underbrace{D^2 \times S^1}_{X_U = S^3 \setminus V(U)} \cup \underbrace{S^1 \times D^2}_{V(U)}$$

$$g : X_U \longrightarrow X_U :$$



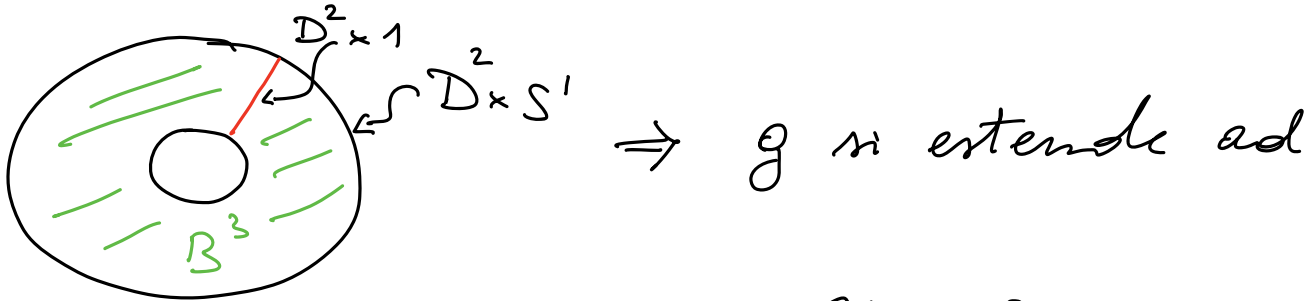
Ora incoltiamo alla seconda copia di X_U un toro solido, in modo che il bordo di un disco meridiano si incolli a $g(m_U)$:

$$\overline{X_U} := D^2 \times S^1 \cup X_U, \quad \partial(D^2 \times S^1) = \partial X_U$$

dove $\partial(D^2 \times S^1)$ e ∂X_U sono identificati in modo che $\partial D^2 \times 1 \hookrightarrow g(m_U)$.

Allora $g : X_U \rightarrow \overline{X_U}$ si estende a $D^2 \cup X_U \rightarrow \overline{X_U}$, dove $D^2 \subset V(U)$ disco con $\partial D^2 = m_U$.

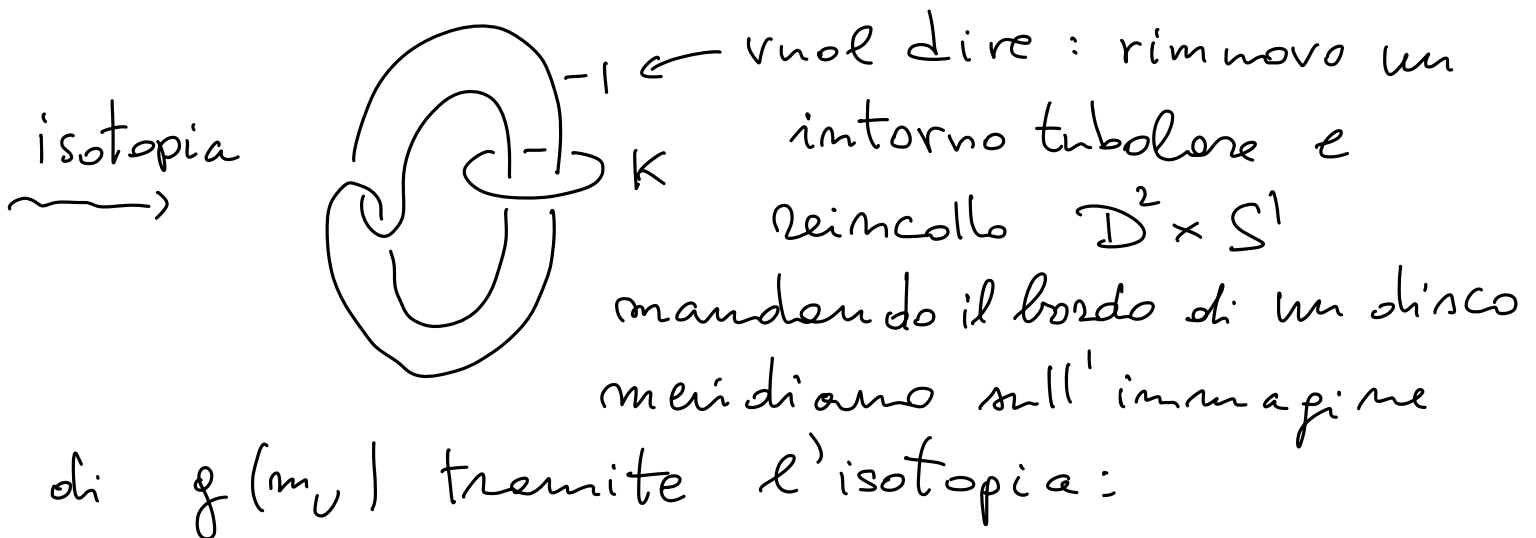
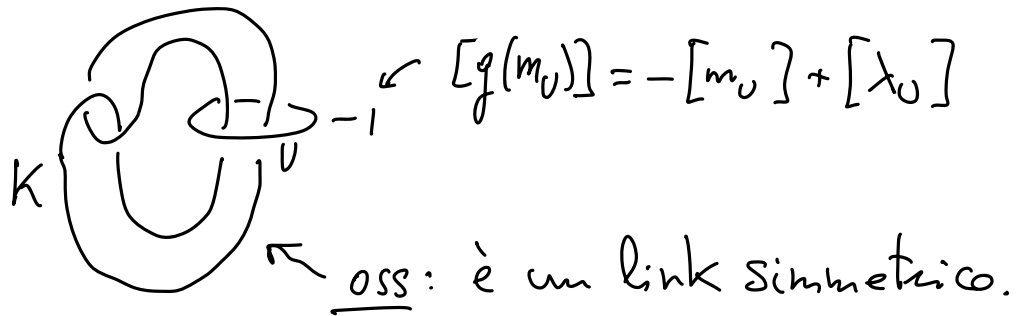
Ma (fatto) : ogni omeo. di $S^2 = \partial B^3$ in se
 si estende ad un omeo. di B^3 , e



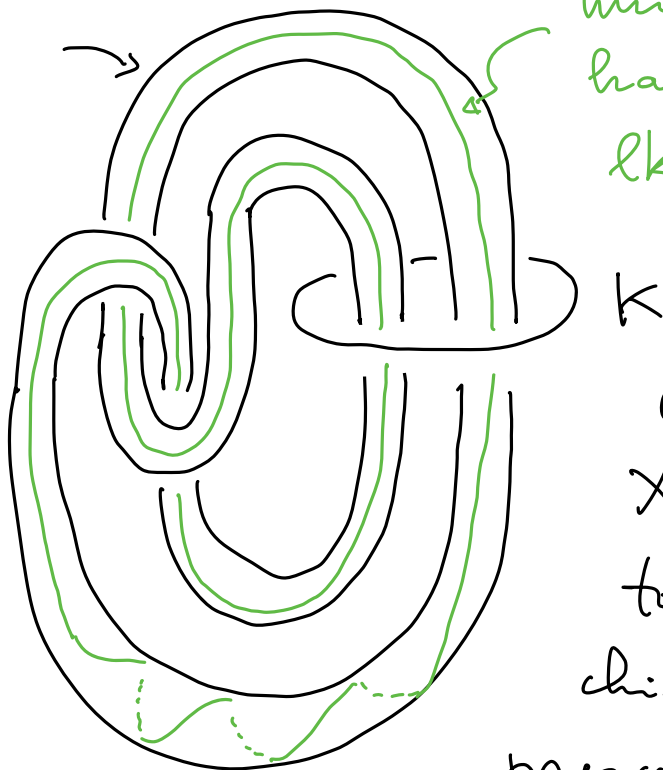
un omeo. $\tilde{g} : S^3 \xrightarrow{\sim} \overline{X}_U$.

$\overline{X}_U$ è stato ottenuto per **chirurgia su U** .

Notazione :



$C :=$
cuore
del
toro
solido

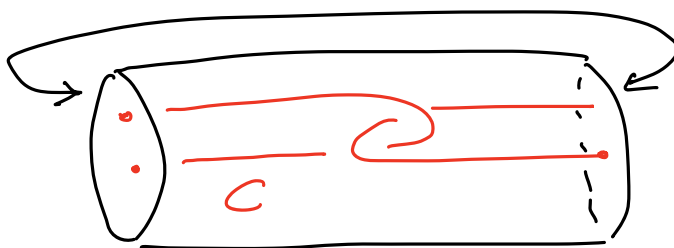


curva longitudinale che
ha n.ro di allacciamento
 $lk(U, g(m, 1)) = -1$
con C

Questo ci dice che
 X_K si ottiene dal
toro solido facendo
chirurgia come
prescritto dalla curva verde.

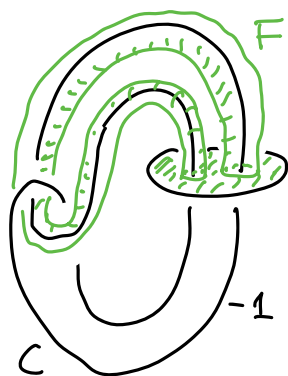
Quindi il rivestimento Abelianico ciclico
 $X_\infty \rightarrow X_K$ si ottiene per chirurgia
sulle curve ottenute sollevando C :

$$D^2 \times S^1 =$$

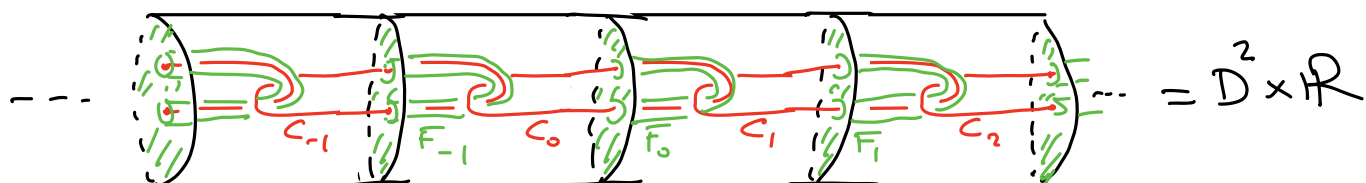


(1)

Giustifichiamo l'affermazione che
il rivestimento Abeliamente ciclico $X_\infty \rightarrow X_K$
si ottiene per chirurgia sulle curve
ottenute sollevando C : una superficie di
Seifert per K è visibile nella figura:



$\Rightarrow$ sollevando F e C :



Effettuando chirurgie sui sollevamenti C_i di C
si ottiene uno spazio X_∞ decomposto nell'unione

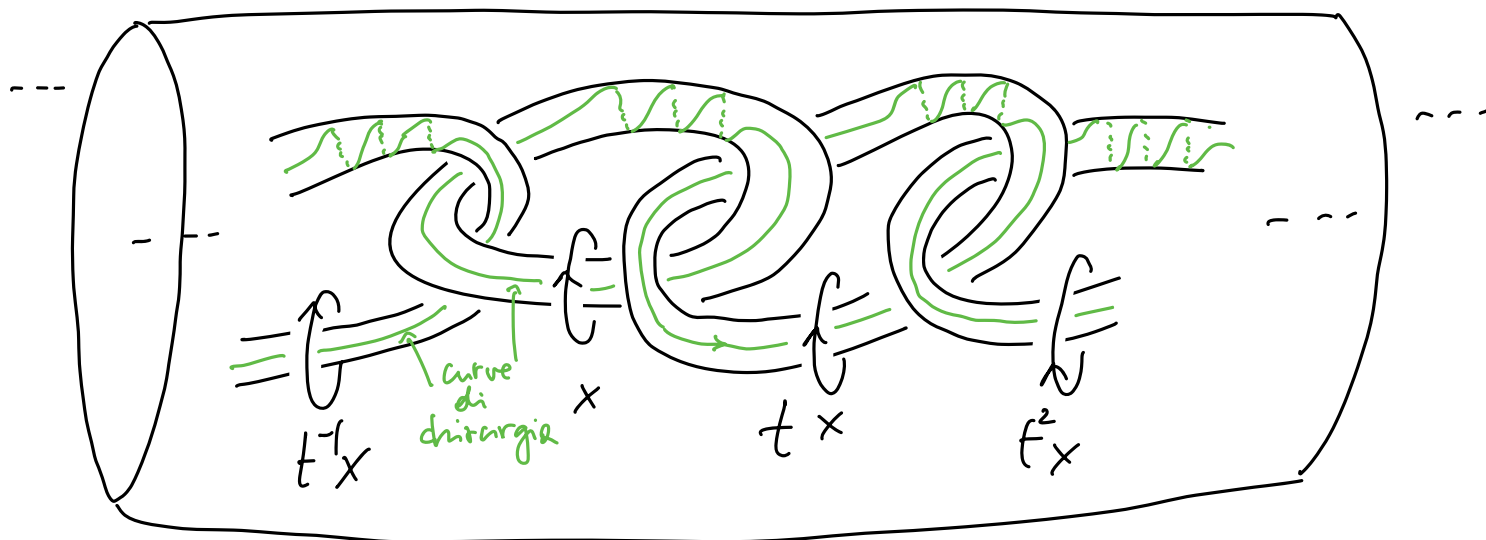
$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i, \quad \text{con} \quad Y_i \approx X_K \quad \text{con un'azione}$$

di $\mathbb{Z}$ tale che il generatore $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$

$$F_i \text{ in } F_{i+1} \quad \text{e} \quad Y_i \text{ in } Y_{i+1}.$$

(2)

Inoltre, $X_\infty / \mathbb{Z} \approx X_K$. Quindi X_∞ è il rivestimento ciclico infinito di X_K



$H_1(X_\infty)$ = quoziente del modulo libero generato da x su $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, modulo la relazione:

$$-x - t^2x + 3tx = (-t^2 + 3t - 1)x = 0$$

$$\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \xrightarrow{(t^2 - 3t + 1)} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow H_1(X_\infty) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Delta_K(t) \doteq -3 + t + \frac{1}{t}$$

~*~

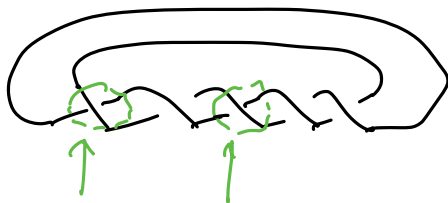
In linea di principio, il metodo appena visto può essere utilizzato per calcolare il polinomio di Alexander

di qualunque nodo.

3

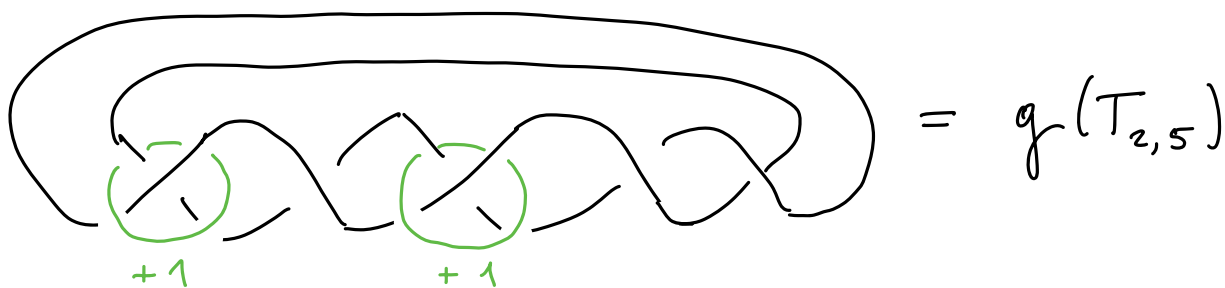
Esempio:

$T_{2,5}$

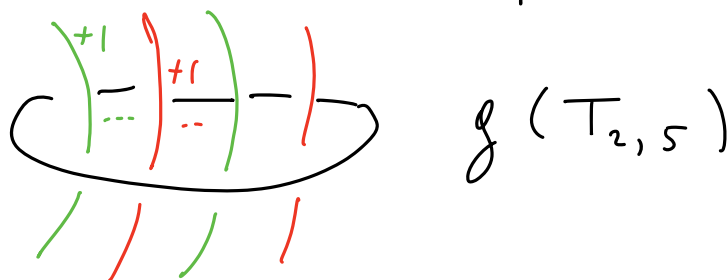


oss: scambiando si ottiene il nodo banale

Bisogna fare chirurgia lungo modi banali con n.ro di allacciamento = 0 con $T_{2,5}$:



si usa g^{-1} invece di g
& isotopia



→ si ottengono due famiglie di sollevamenti chiusi della curva verde e di quelle rossa.

⇒ $H_1(X_\infty)$ ha due generatori in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$
e due relazioni.

In generale, vediamo che se $K \subset S^3$ si snoda con m scambi di incroci allora il suo modulo di Alexander ha una matrice di presentazione A $m \times m$. Quindi: $r \geq m+1 \Rightarrow$ ④

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(K) &= \text{ideale generato dai minori} \\ &\quad (m+1-r) \times (m+1-r) \text{ di } A \\ &= \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato:

Teorema: Se $\mathcal{E}_r(K) \neq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ allora l'unknotting number $u(K)$ è $\geq r$. 

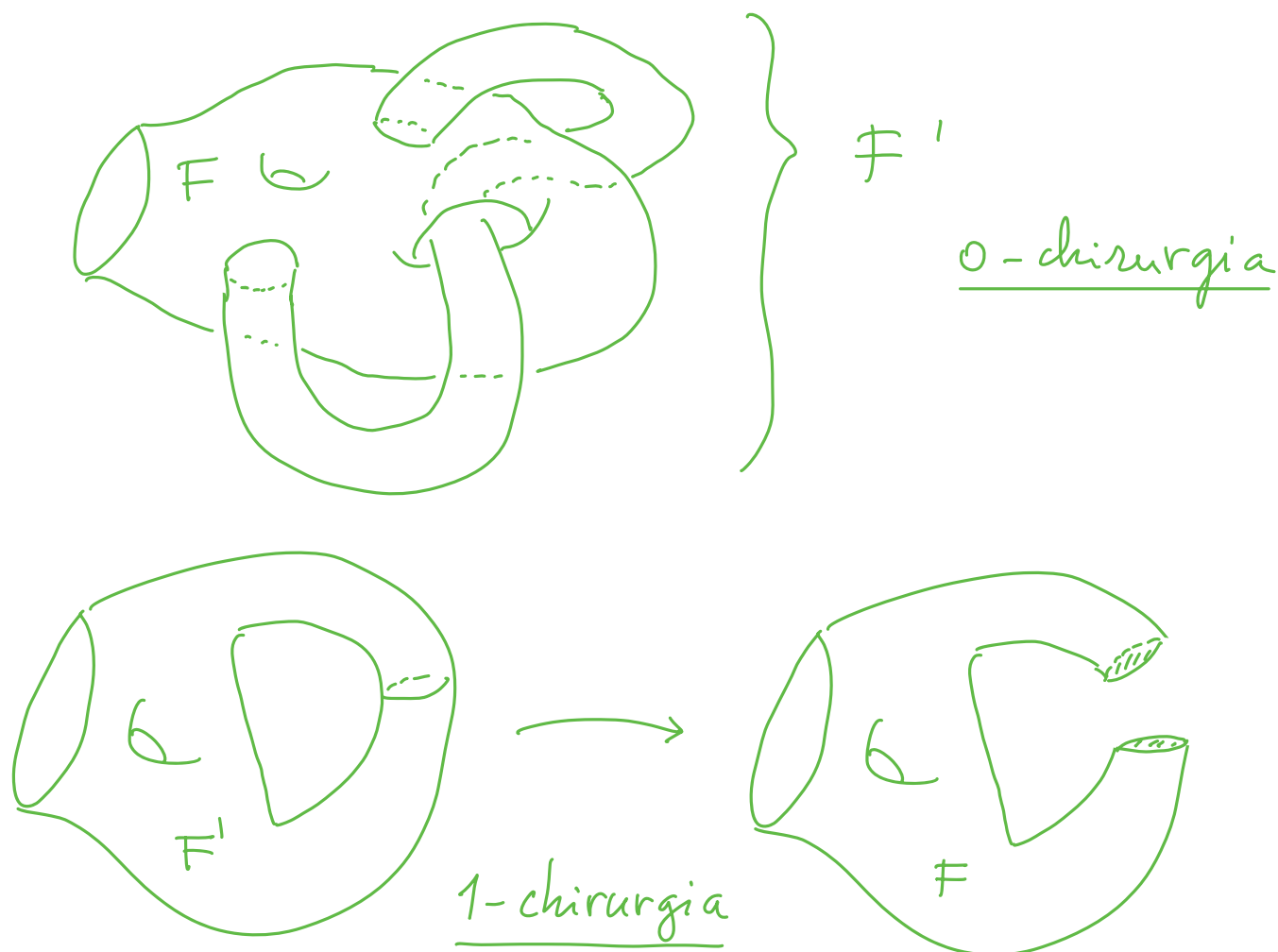
~ * ~ * ~ * ~

Problema: che relazione c'è tra due superfici di Seifert di uno stesso link?

Definizione: $F \subset S^3$ superficie di Seifert. Sia $C = [0, 1] \times D^2 \subset S^3$ cilindro solido t.c. $C \cap F = \{0, 1\} \times D^2$ ed

$$F' := (F \setminus \{0, 1\} \times D^2) \cup \underset{\{0, 1\} \times \partial D^2}{[0, 1] \times \partial D^2}$$

sia orientabile. Allora F' è ottenuta (5)
da F tramite una 0-chirurgia, e
 F da F' tramite una 1-chirurgia.

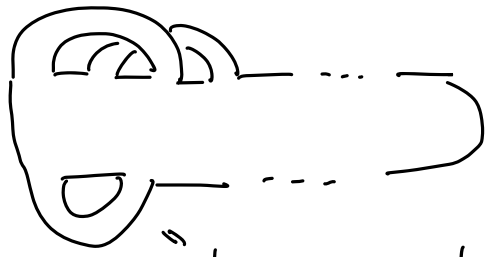


Teorema $F_1, F_2 \subset S^3$ superfici di Seifert
con $\partial F_1 = \partial F_2 \Rightarrow F_1, F_2$ differiscono
per una successione di isotopie, 0-chirurgie
e 1-chirurgie.

Definizione: due superfici come nell'enunciato
del teorema si dicono S-equivalenti.

dim. del teorema :

I-passo : ogni superficie di Seifert è S -equivalente ad una superficie F_D ottenuta da un diagramma D tramite l'algoritmo di Seifert.

$$F_{g,n} = \text{disco} \cup \text{bande} \hookrightarrow S^3$$


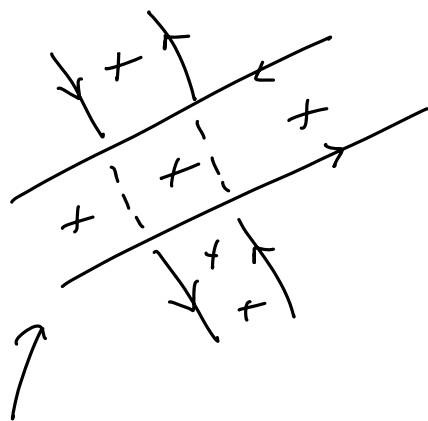
A meno di isotopia : disco si proietta su disco standard di raggio ε in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$, proiezioni delle bande disgiunte da quella del disco e con aspetto di 'diagramma di link' :

Esempio :

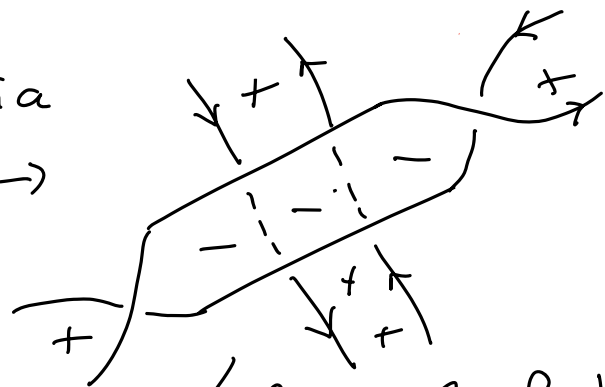


La superficie originale non si riottiene applicando l'algoritmo di Seifert al diagramma.

Questo si può verificare intorno agli
incroci tra bande. Applichiamo delle isotopie:

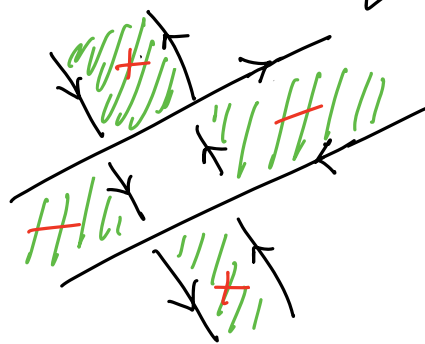


isotopia

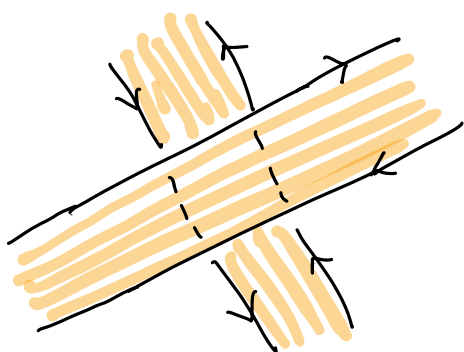


alg. di Seifert

In questo caso :

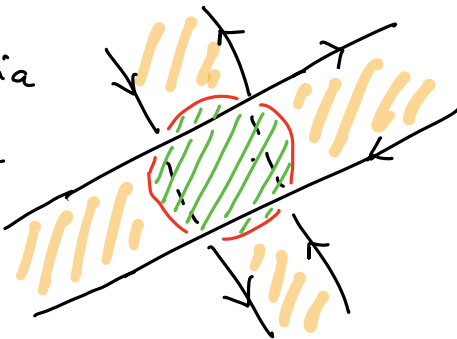


Osserviamo :

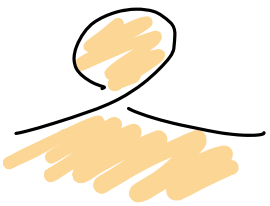
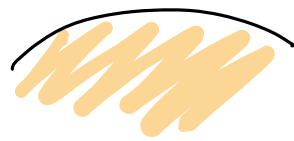


1-chirurgia
+ isotopia

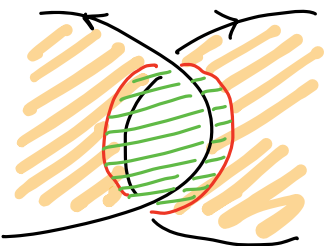
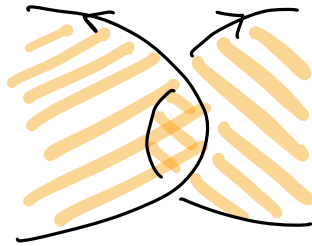
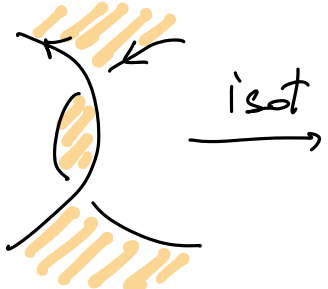
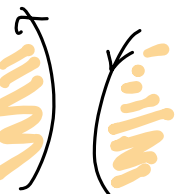
0-chirurgia
+ isotopia



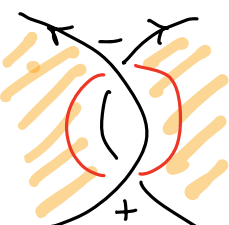
II passo: $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ diagrammi Reidemeister-equivalenti $\Rightarrow F_D, F_{D'}$ S-equivalenti.

R1:  $\xrightarrow{\text{isotopia}}$  + veri simili

R2:

 $\xrightarrow[+ \text{isot.}]{1\text{-chir.}}$  $\xrightarrow{\text{isot.}}$ 
 $\xrightarrow{\text{isot.}}$  $\xrightarrow{\text{isot.}}$  $\xrightarrow[+ \text{isot.}]{1\text{-ch.}}$ 

R3: introduciamo una notazione:

 $\xrightarrow{1\text{-chir.}}$  $\xrightarrow{\text{isot.}}$ 
 $\begin{matrix} \uparrow & - & \uparrow \\ & + & \\ \uparrow & & \uparrow \end{matrix} \xleftrightarrow{S\text{-equiv}} \begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$

(2)

Quindi : $\begin{array}{c} \uparrow - \uparrow \\ + \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} S \\ \uparrow \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} S \\ \uparrow + \uparrow \\ - \uparrow \end{array}$

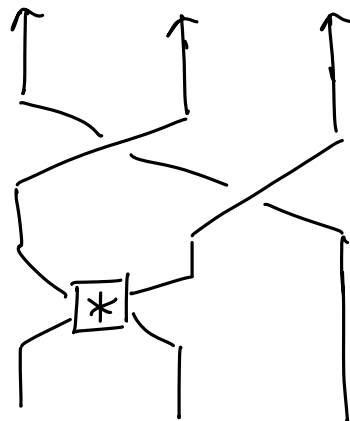
Ora osserviamo :



isotopia

isotopia

$$* = + \circ -$$



Lemma :

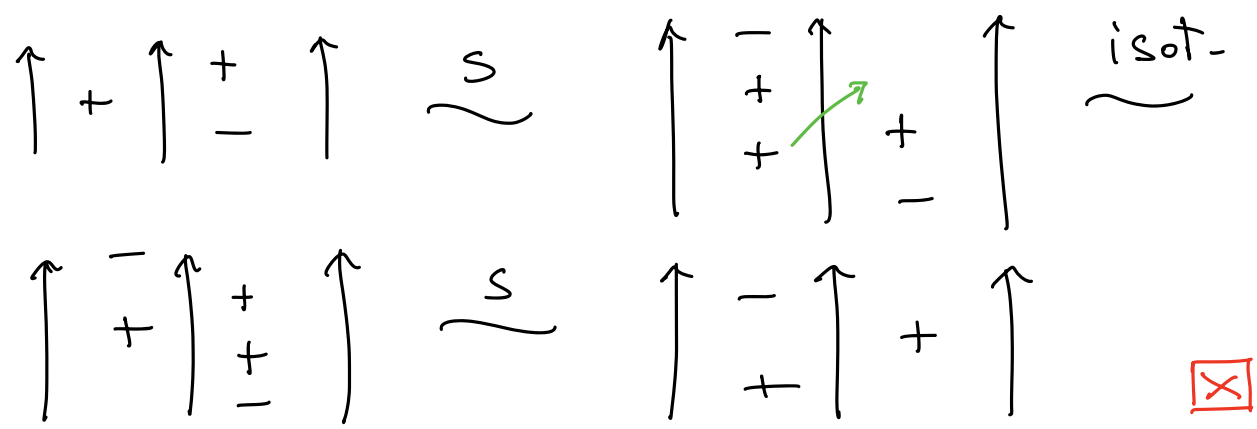
1. $\begin{array}{c} \uparrow + \uparrow * \uparrow \\ + \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} isot \\ \uparrow + \uparrow + \uparrow \\ * \uparrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{dimostrato} \\ \text{sopra} \end{array} \right)$

2. $\begin{array}{c} \uparrow - \uparrow - \uparrow \\ * \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} isot \\ \uparrow * \uparrow - \uparrow \\ - \uparrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{stessa} \\ \text{dim.} \end{array} \right)$

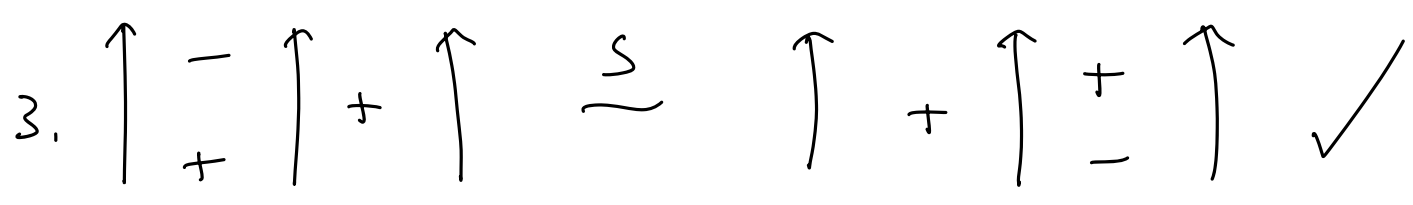
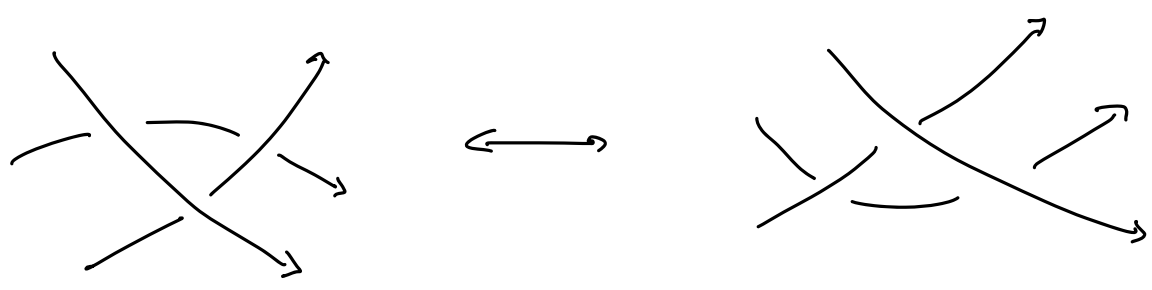
3. $\begin{array}{c} \uparrow + \uparrow + \uparrow \\ + \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} S \\ \uparrow - \uparrow + \uparrow \\ + \uparrow \end{array}$

4. $\begin{array}{c} \uparrow - \uparrow + \uparrow \\ - \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} S \\ \uparrow - \uparrow - \uparrow \\ + \uparrow \end{array}$

dim di 3. (4. è simile)



Un caso possibile della mone R3 :



Altri casi : simili tranne questo tipo :



(4)



Ora analizziamo la dipendenza della matrice di Seifert dalle scelte della superficie F e di una base di $H_1(F)$.

Poiché

A rappresenta un'applicazione bilineare

$$H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

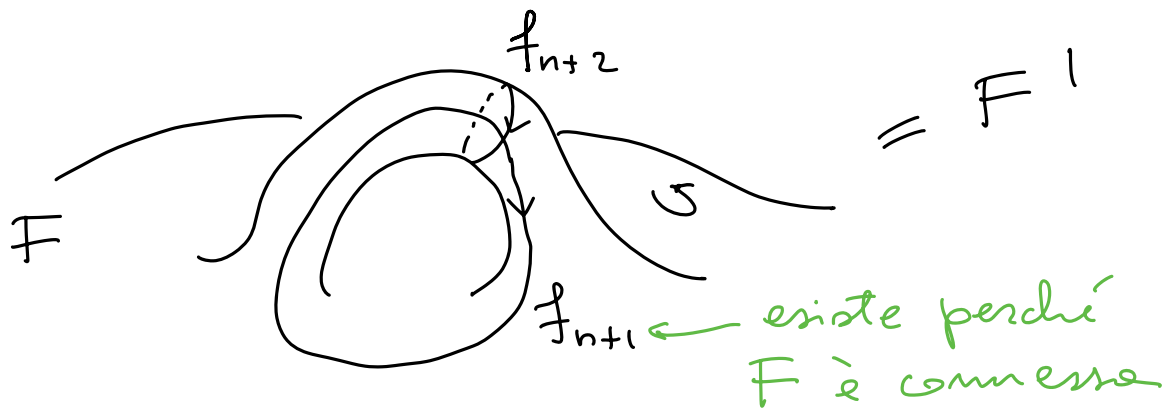
$$(x, y) \mapsto \beta((i_-)_* x, y)$$

cambiando base A cambia tramite una congruenza: $A \mapsto$

$$A \mapsto {}^t P A P, \quad P \in GL_n(\mathbb{Z})$$

Se invece $F' = F \cup \text{tubo}$:

5



$$\{f_1, \dots, f_n\} \subset H_1(F) \text{ base}$$

$$\Rightarrow H_1(F') \supset \{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}\} \text{ base}$$

(esercizio: MV).

$$lk(f_i^{\pm}, f_{n+2}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, n+2$$

$$lk(f_{n+1}^+, f_{n+2}) = \begin{cases} 0 & \text{con l'orientazione in figura} \\ 1 & \text{con l'orient. opposta} \end{cases}$$

$$lk(f_{n+1}^-, f_{n+2}) = \begin{cases} 1 & \text{con l'orientazione in figura} \\ 0 & \text{con l'orient. opposta} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1° caso

$$\begin{matrix} & f_1 & \dots & f_n & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \begin{matrix} f_1^- \\ \vdots \\ f_n^- \\ f_{n+1}^- \\ f_{n+2}^- \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{cong.}} \begin{pmatrix} A & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

espansione di A

A è una **riduzione** di A' .

2° caso:

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & * & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & * & 0 \\ \hline * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ t\eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = A'$$

Def.: due matrici quadrate intere A, B sono **S-equivalenti** se si ottengono una dall'altra tramite una successione di espansioni, riduzioni e congruenze.

Def.: $L \subset S^3$ link orientato,
 A = qualunque matrice di Seifert per L .
Il polinomio di Laurent

$$\bar{\Delta}_L := \det \left(t^{1/2} A - t^{-1/2} t^t A \right) \in \mathbb{Z} \left[t^{1/2}, t^{-1/2} \right]$$

è il **polinomio di Alexander-Conway**.

Teorema: $\bar{\Delta}_L$ è un invariante ben definito di L .

dim: dobbiamo verificare che $\bar{\Delta}_L$ rimane invariato se A cambia per congruenze, espansioni e riduzioni.

- congruenze :

(7)

$$\det(t^{1/2} {}^t P A P - t^{-1/2} {}^t P {}^t A P) = \det(P)^2 \underbrace{\bar{\Delta}_L}_1 \checkmark$$

- espansione/riduzione (1° caso, l'altro è analogo).

$$B = \begin{pmatrix} A & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{t^{1/2} B - t^{-1/2} {}^t B} = \begin{pmatrix} t^{1/2} A - t^{-1/2} {}^t A & t^{1/2} \xi & 0 \\ -t^{-1/2} t \xi & 0 & t^{1/2} \\ 0 & \dots & 0 - t^{-1/2} 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\downarrow) = \det \begin{pmatrix} t^{1/2} A - t^{-1/2} {}^t A & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & t^{1/2} \\ 0 & \dots & 0 - t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \bar{\Delta}_L \quad \boxed{\times}$$

Oss: 1) A $n \times n \Rightarrow$

$$\bar{\Delta}_L = \det(t^{1/2} A - t^{-1/2} {}^t A) = t^{-2/2} \underbrace{\det(tA - {}^t A)}_{\Delta_L(t)}$$

$\Rightarrow \bar{\Delta}_L$ = a meno di unità in $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$, coincide con $\Delta_L(t)$ = pol. di Alexander.

Oss.: $K \subset S^3$ nodo $\Rightarrow$ ogni sua matrice di Seifert ⑧
 ha ordine pari $\Rightarrow$

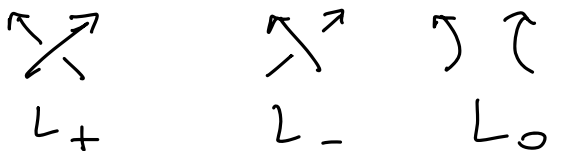
$$\bar{\Delta}_K \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}], \quad \bar{\Delta}_K(t) = \bar{\Delta}_K(t^{-1})$$

e $\bar{\Delta}_K(1) = \det(A - {}^t A) = 1$ già visto

Teorema (relazione skein di $\bar{\Delta}_L$):

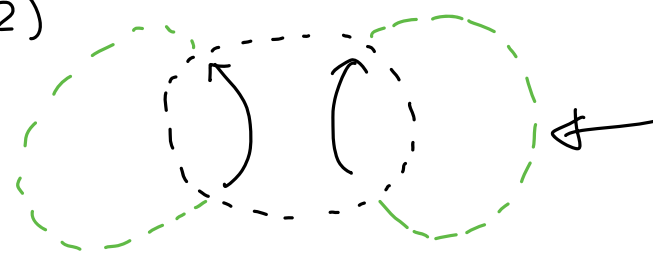
$L \subset S^3$ link orientato. Il polinomio $\bar{\Delta}_L$ soddisfa ed è caratterizzato da:

(1) $\bar{\Delta}_\emptyset = 1$ e $\bar{\Delta}_L = 0$ se L è un unlink;

(2)  $\Rightarrow$

$$\bar{\Delta}_{L_+} - \bar{\Delta}_{L_-} = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \bar{\Delta}_{L_0}$$

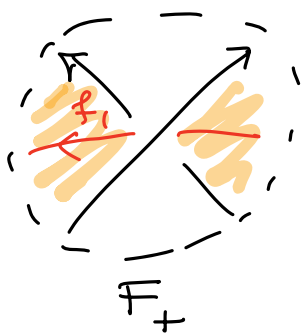
dim.: (1) $\bar{\Delta}_\emptyset = 1$: esercizio. $|L| > 1 \Rightarrow \bar{\Delta}_L(t) = 0$
 $\Rightarrow \bar{\Delta}_L = 0$ perché coincide con $\Delta_L(t)$ a meno di unità in $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$

(2)  i due 'rami locali' di L_0
 devono connettersi così
 (per Jordan).

$$\Rightarrow \mathbb{T}_0 = \left(\begin{array}{c} + \\ + \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} + \\ + \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} + \\ + \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ in ogni caso:

(9)



$$\Rightarrow H_1(F_{\pm}) \cong H_1(F_0) \oplus \langle [f_1] \rangle \text{ (esercizi - MV)}$$

$$A_+ = \begin{matrix} f_1 \dots \\ f_1^- \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} n-1 & t_{\xi} \\ \hline \eta & A_0 \end{array} \right), \quad A_- = \left(\begin{array}{c|c} n & t_{\xi} \\ \hline \eta & A_0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow t^{1/2} A_+ - t^{-1/2} A_+ = \begin{pmatrix} n(t^{1/2} - t^{-1/2}) - (t^{1/2} - t^{-1/2}) & t^{1/2} t_{\xi} - t^{-1/2} t_{\eta} \\ t^{1/2} \eta - t^{-1/2} \zeta & t^{1/2} A_0 - t^{-1/2} A_0 \end{pmatrix}$$

La prima colonna è:

$$\begin{pmatrix} n(t^{1/2} - t^{-1/2}) \\ t^{1/2} \eta - t^{-1/2} \zeta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^{1/2} - t^{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\Delta}_{L_+} = \bar{\Delta}_{L_-} - (t^{1/2} - t^{-1/2}) \bar{\Delta}_{L_0}$$

Infine, poiché scambiando alcuni incroci di un diagramma di L si ottiene un link banale, per (1) $\bar{\Delta}_L$ è univocamente determinato dalle relazioni skein.

IX

Proposizione: Sia $L \subset S^3$ un link orientato.

Allora esiste un polinomio $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tale che

$$\bar{\Delta}_L = \nabla_L(t^{-1/2} - t^{1/2}).$$

dim.:

$\nabla_L(z)$ esiste: sia D = diagramma di L .

Supponiamo che scambiando n incroci di D si ottenga un unlink. Induzione su $n \geq 0$:

- Se $n = 0$ abbiamo $\bar{\Delta}_L = \begin{cases} 1 & \text{se } |L| = 1 \\ 0 & \text{se } |L| > 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow \nabla_L(z)$ esiste.

- Se $n > 1$, sia c uno degli n incroci.

Allora L_+ e L_0 oppure L_- ed L_0 ammettono un diagramma che diventa quello dell'unlink scambiando $n-1$ incroci. Supponiamo ad esempio che valga il primo caso. Allora

$$\bar{\Delta}_{L_+} = \nabla_{L_+}(t^{-1/2} - t^{1/2}), \quad \bar{\Delta}_{L_0} = \nabla_{L_0}(t^{-1/2} - t^{1/2})$$

$$\text{e } \bar{\Delta}_{L_-} = \bar{\Delta}_{L_+} - (t^{-1/2} - t^{1/2}) \bar{\Delta}_{L_0} \text{ (skein),}$$

$$\text{ovvero } \bar{\Delta}_{L_-} = \left[\nabla_{L_+}(z) - z \nabla_{L_0}(z) \right] \Big|_{z = t^{-1/2} - t^{1/2}}$$



Definizione Il polinomio $\nabla_L(z)$ della proposizione si chiama **polinomio di Conway** di L .

Oss: Il polinomio di Conway è chiaramente unico e soddisfa la relazione skein:

$$\nabla_{L_+}(z) = \nabla_{L_-}(z) + z \nabla_{L_0}(z).$$

~ * ~ * ~ * ~

Signature di Levine-Tristram

DEF: $L \subset S^3$ link orientato, $\omega \in S^1$, $\omega \neq 1$
 $\Rightarrow$ ℓ^3 **ω -signature** di L è

$$\sigma_{\omega}(L) := \text{segn} \left(\underbrace{(1-\omega)A}_{\text{matrice di Seifert}} + \underbrace{(1-\bar{\omega})^t A}_{\text{matrice Hermitiana}} \right)$$

signature := # autov. > 0 - # autov. < 0

Teorema: $\sigma_{\omega}(L)$ è un invariante di isotopia di L .

Dim.: $A_w := (1-w)A + (1-\bar{w})^t A$

(3)

Se A' congrua ad A , A'_w congrua ad A_w

$$\Rightarrow \text{segn}(A'_w) = \text{segn}(A_w) \quad \checkmark$$

$$B = \begin{pmatrix} A & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{in senso complesso: } B \sim P B^t \bar{P}$$

$$B_w = \begin{pmatrix} A_w & (1-w)\xi & 0 \\ (1-\bar{w})^t \xi & 0 & 1-w \\ 0 & 1-\bar{w} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{cong}} \begin{pmatrix} A_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-w \\ 0 & 1-\bar{w} & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\bar{w} \cdot (1-w) = 1-\bar{w}, \quad -w \cdot (1-\bar{w}) = 1-w$$

$$\Rightarrow \text{segn}(B_w) = \text{segn}(A_w) + \text{segn} \begin{pmatrix} 0 & 1-w \\ 1-\bar{w} & 0 \end{pmatrix}$$

poiché $\det \begin{pmatrix} 0 & 1-w \\ 1-\bar{w} & 0 \end{pmatrix} = -|1-w|^2 < 0$,

$$\text{segn} \begin{pmatrix} 0 & 1-w \\ 1-\bar{w} & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad \checkmark$$

Per l'altra espansione/contrazione la dimostrazione è analoga

X

Oss.: La matrice A_w è singolare $\Leftrightarrow \Delta_L(w) = 0$:

$$1-w = -w(1-\bar{w}) \Rightarrow$$

$$A_w = (1-w)A + (1-\bar{w})^t A = -(1-\bar{w}) \begin{pmatrix} wA & -^t A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{la conclusione segue } (w \neq 1).$$

L'osservazione implica che $\sigma_w(L)$ è costante sulle componenti connesse di

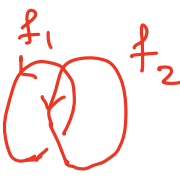
(4)

$$S^1 \setminus \{\Delta_L = 0\}, \{1\}$$

$\sigma_{-1}(L)$ è detta anche la **segatura** di L , ed a volte denotata con $\sigma(L)$.

Esercizio: mostrare che per ogni $w \in S^1 \setminus \{1\}$ si ha $\sigma_w(\tau L) = \sigma_w(L)$ e $\sigma_w(m(L)) = -\sigma_w(L)$.

Corollario: $m(T_{3,2}) \neq T_{3,2}$.

dim:   $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^- & -1 & 0 \\ f_2^- & +1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_{-1} = 2(A + {}^t A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{tr}(A_{-1}) < 0, \det(A_{-1}) > 0 \Rightarrow \text{segn}(A_{-1}) = -2$$

$$\Rightarrow \sigma(T_{3,2}) = -2 \neq 0 \Rightarrow m(T_{3,2}) \neq T_{3,2} \quad \boxed{\times}$$

~ * ~ * ~ * ~

Parentesi di Kauffman e polinomio di Jones

$$\langle \rangle : \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammi di link} \\ \text{non orientati} \end{array} \right\} / \begin{array}{l} \text{isotopia} \\ \text{planare} \end{array} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}].$$

$\langle \rangle$ è definito (e caratterizzato) da:

(5)

$$(i) \quad \langle \bigcirc \rangle = 1$$

$$(ii) \quad \langle D \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$$

$$(iii) \quad \langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \rangle$$

$\uparrow$
1-risoluzione

$\uparrow$
0-risoluzione

Fissato un ordine degli incroci di D ,

(i), (ii), (iii) forniscono un polinomio $\in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$.

Basta verificare che scambiando l'ordine di due incroci il risultato non cambia.

[Esercizio: verificarlo]

Effetto delle mosse di Reidemeister su $\langle \rangle$:

$$\begin{aligned} R1: \quad \langle \overbrace{\times}^+ \rangle &= A^{-1} \langle \cup \rangle + A \langle \cap \rangle = \\ &= A^{-1} \langle \cup \rangle + A (-A^{-2} - A^2) \langle \cup \rangle \\ &= -A^3 \langle \cup \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \overline{\cap} \rangle = -A^{-3} \langle \cup \rangle \quad (\text{stessa dim.})$$

$$\begin{aligned} R2: \quad \langle \overbrace{\times}^{\text{cross}} \rangle &= A \langle \overbrace{\times}^{\text{no cross}} \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \\ &= A (A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \rangle) + A^{-1} (-A^3) \langle \rangle \langle \rangle \\ &= \cancel{(A^2 - A^2)} \langle \rangle \langle \rangle + \langle \text{---} \rangle \quad \checkmark \end{aligned}$$

(6)

$\Rightarrow \langle \rangle$ è $R2$ - invariante

Esercizio: $\langle \rangle$ è $R3$ - invariante.

Esempio: $\langle \bigcirc \rangle = A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle$
 $= -A^4 \langle \bigcirc \rangle - A^{-4} \langle \bigcirc \rangle = -A^4 - A^{-4}$

Esercizio: $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$

Esercizio: ogni termine in $\langle D \rangle$ ha grado in A congruo al numero di incroci di D modulo 2.



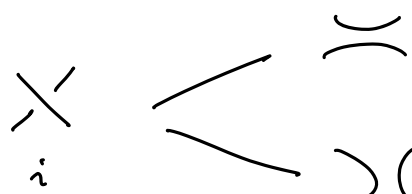
Esercizio: $D = \text{diagramma}$, $\mathcal{E} = \{\text{incroci di } D\}$,

$s: \mathcal{E} \rightarrow \{1, -1\}$ **stato**

ogni stato

determina

unione SD di
cerchi disgiunti.



$$s(i) = 1$$

$$s(i) = -1$$

$$\langle D \rangle = \sum_{s: \mathcal{E} \rightarrow \{1, -1\}} A^{\sum_i s(i)} \left(-A^{-2} - A^2 \right)^{\substack{|SD| - 1 \\ \uparrow \\ \text{n.ro di} \\ \text{cerchi in} \\ SD}} \quad (*)$$

(7)

DEF. : $D = \text{diagramma orientato}$

$$\Rightarrow w(D) := \sum_{c \in \{\text{mossa di } D\}} \varepsilon(c) \in \mathbb{Z} \quad \text{writhe di } D.$$

$$\begin{aligned} w(\text{positive crossing}) &= w(\text{negative crossing}) + 1 \\ w(\text{negative crossing}) &= w(\text{positive crossing}) - 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{vero per} \\ \text{qualsunque} \\ \text{orientazione} \end{array} \right.$$

facile verificare : w non cambia con mosse $R2$ ed $R3$

$$\Rightarrow (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \quad \text{invariante di link orientati}$$

(1)

DEF.: $L \subset S^3$ link orientato.

D = diagramma di L

$$V(L) := \left[(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \right]_{A^{-2} = t^{1/2}} \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

per (*)

grado di ogni

addendo in $\langle D \rangle \stackrel{(2)}{=} |\mathcal{C}| \stackrel{(2)}{=} w(D) \Rightarrow$ ha senso.

Osservazioni:

• $V(U) = 1$ se U = nodo banale.

• cambiando l'orientazione
di un diagramma D di L :

$w(D)$, $\langle D \rangle$ non cambiano $\Rightarrow$

$$V(r(L)) = V(L).$$

$$\langle X \setminus \rangle = A \langle \asymp \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \quad (\star)$$

$$\langle X \setminus \rangle = A^{-1} \langle \asymp \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle \quad (\star\star)$$

Scambiando tutti gli involi: $w(m(D)) = -w(D)$,

$$\begin{aligned} & (\star) + (\star\star) \\ \Rightarrow \langle m(D) \rangle &= \overline{\langle D \rangle} := \langle D \rangle \Big|_{A \rightarrow A^{-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(m(L)) = \overline{V(L)} := V(L) \Big|_{t^{1/2} \rightarrow t^{-1/2}}$$

Esempio: $D_{T_{2,3}} =$  $w(D_{T_{2,3}}) = 3$

$$\Rightarrow \langle D_{T_{2,3}} \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5$$

↖ Esercizio

$$\Rightarrow V(T_{2,3}) = (-A)^{-9} \cdot \langle D_{T_{2,3}} \rangle \Big|_{A=t^{-2}} = -t^4 + t^3 + t$$

$\Rightarrow T_{2,3} \neq m(T_{2,3})$. Inoltre, si può verificare

che $\sigma_\omega(G_1) = 0 \ \forall \ \omega \neq 1$, mentre

$$V(G_1) \neq \overline{V(G_1)}$$

(3)

Domanda: $\exists ?$ modo $K \neq U$ t.c. $V(K) = 1$?

↑ (aperta, di grande interesse).

Esercizio: dimostrare che il polinomio di

Jones soddisfa:

$$t^{-1} V(L_+) - t V(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2}) V(L_0) = 0$$

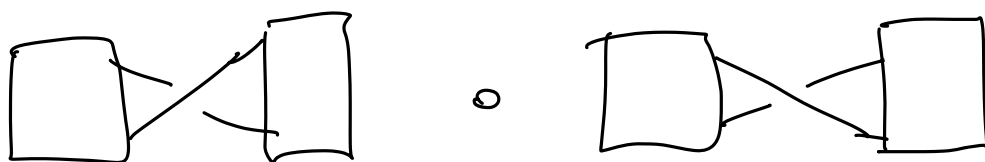
[Suggerimento: usare $(\star)$ + $(\star\star)$]

Teorema (Kauffman, Murasugi, Thistlethwaite)

$L \subset S^3$ link con diagramma connesso, ridotto, alternante con n incroci $\Rightarrow$ ogni diagramma di

L ha $\geq n$ incroci (= Congettura di Tait). $\boxed{\times}$

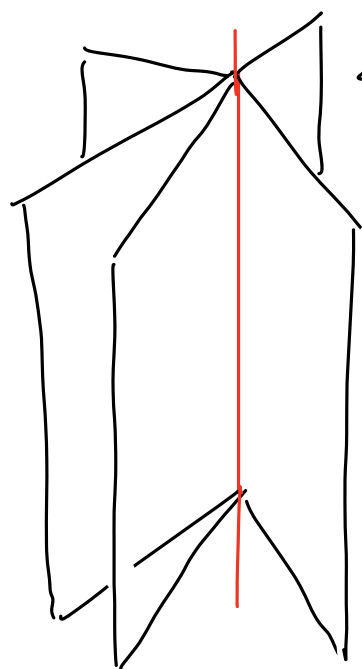
Un diagramma ridotto è un diagramma senza incroci separanti, ovvero non delle forma:



Trecce e teorema di Alexander

(4)

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ con coordinate cilindriche.
 $(r, \theta) \quad z$



$\{ H_\theta \}_{\theta \in [0, 2\pi]}$
Semipiano " $\theta = \text{costante}$ "

← pagine del **libro aperto**
standard di $\mathbb{R}^3$, con
costola l'asse z .

Compattificando: $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$

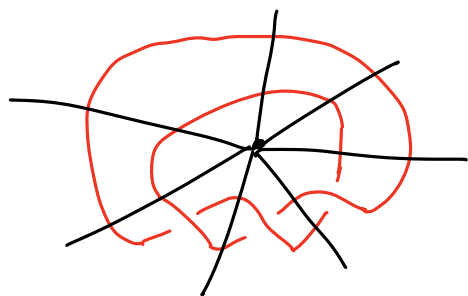
$S^1 \approx \text{asse } z \cup \{\infty\}$

$D_\theta = H_\theta \cup \{\infty\}$ disco.

$\{ D_\theta \}_{\theta \in [0, 2\pi]}$ = libro aperto standard
di S^3 .

DEF: Una **treccia chiusa** è un link
 $L \subset \mathbb{R}^3$, disgiunto dall'asse z , che
interseca trasversalmente ciascun H_θ
in n punti (con n costante).

Esempio:



$$= T_{2,3} \subset \mathbb{R}^3$$

Oss: ogni treccia chiusa è naturalmente orientata nel verso crescente di θ .

Teorema (Alexander): ogni link $L \subset \mathbb{R}^3$ è isotopo ad una treccia chiusa.

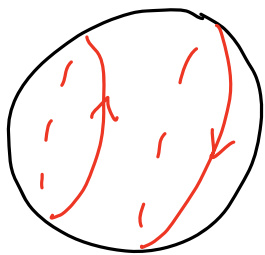
dim: fissiamo un'orientazione su L .

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un diagramma di L .

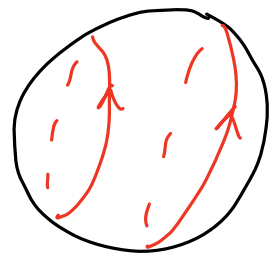
Applicando la risoluzione orientata ad ogni incrocio di D otteniamo un'unione di cerchi di Seifert orientati.

Dati due tali cerchi $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = S^2$, diciamo che sono **discordi** se $C_1 \cup C_2$ è il bordo orientato di un anello $A \subset S^2$, e **concordi** altrimenti:

discordi:



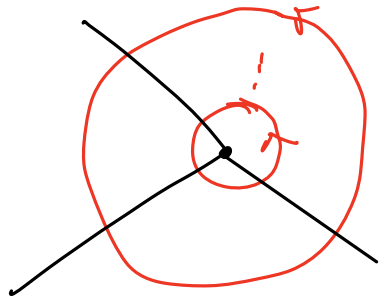
concordi:



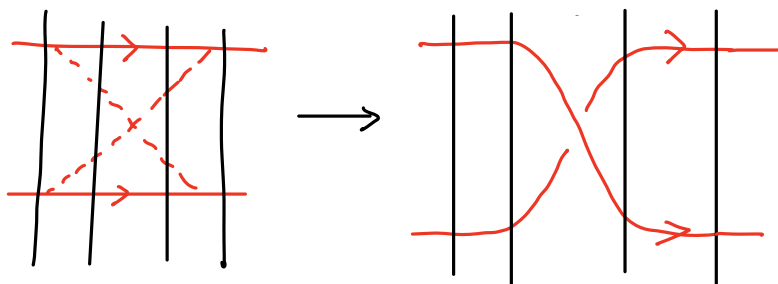
(6)

Se i cerchi sono tutti a due a due concordanti si dicono **paralleli**. Notiamo che in questo caso sono tutti trasversi a tutti i semipiani

H_θ : Inoltre, questa proprietà può essere conservata ricostruendo



gli incroci:



(tutti)

Se fossero orientati nell'altro modo otterrei una treccia chiusa con l'orientazione opposta a quella indotta da $\theta \Rightarrow$ ruotando otterrei l'or. giusta.

Idea: modificare $D \rightarrow D' =$ altro

diagramma di L in modo che la risoluzione orientata di D' sia fatta di cerchi paralleli.

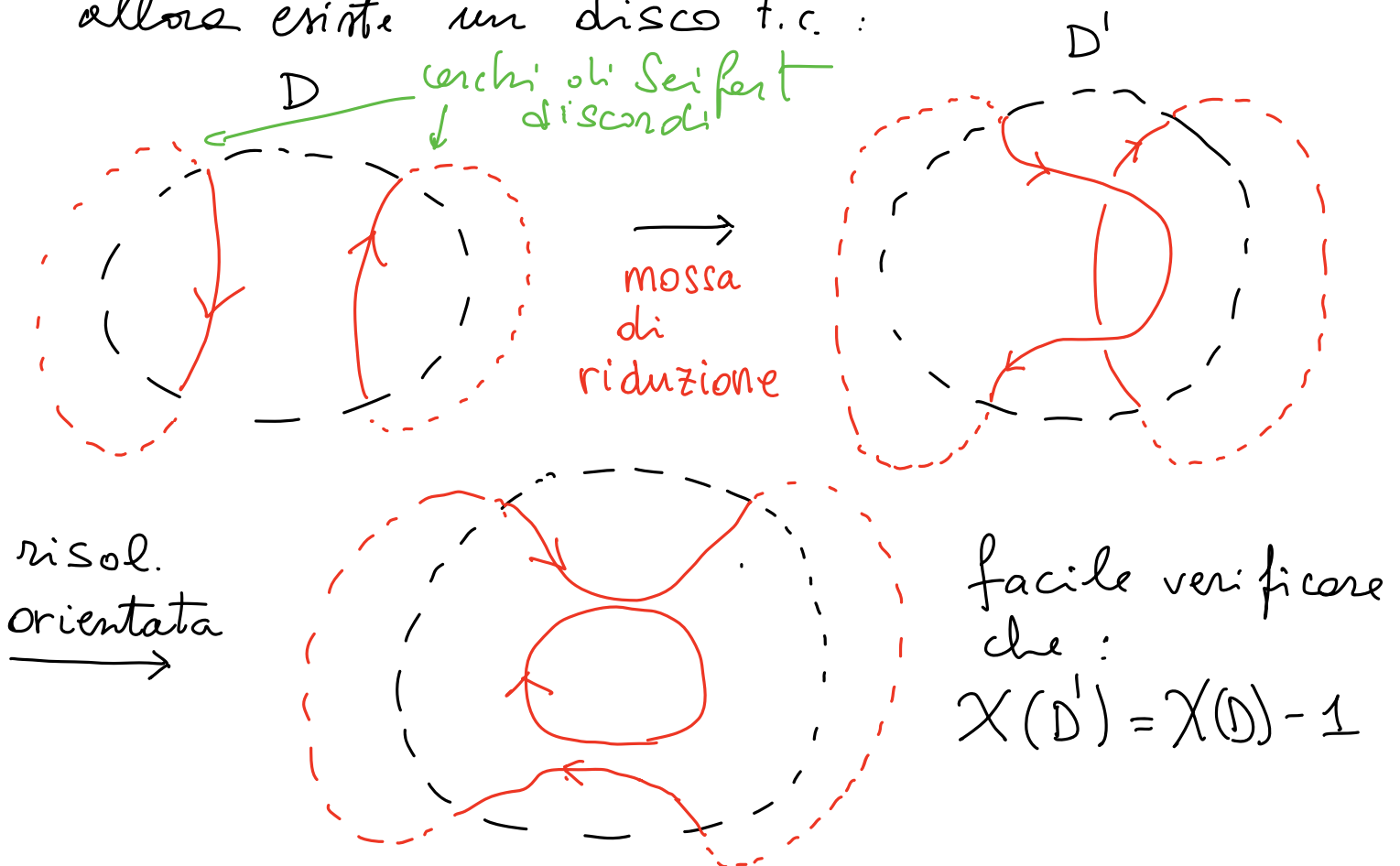
Introduciamo una funzione 'complessità':

(7)

$X(D) :=$ n.ro di coppie di cerchi di Seifert
discordi di D

$X(D) \geq 0$, e se $X(D) = 0$ possiamo realizzare
come sopra l'isotopia cercata.

Affermazione: Se esistono due cerchi discordi
allora esiste un disco t.c.:

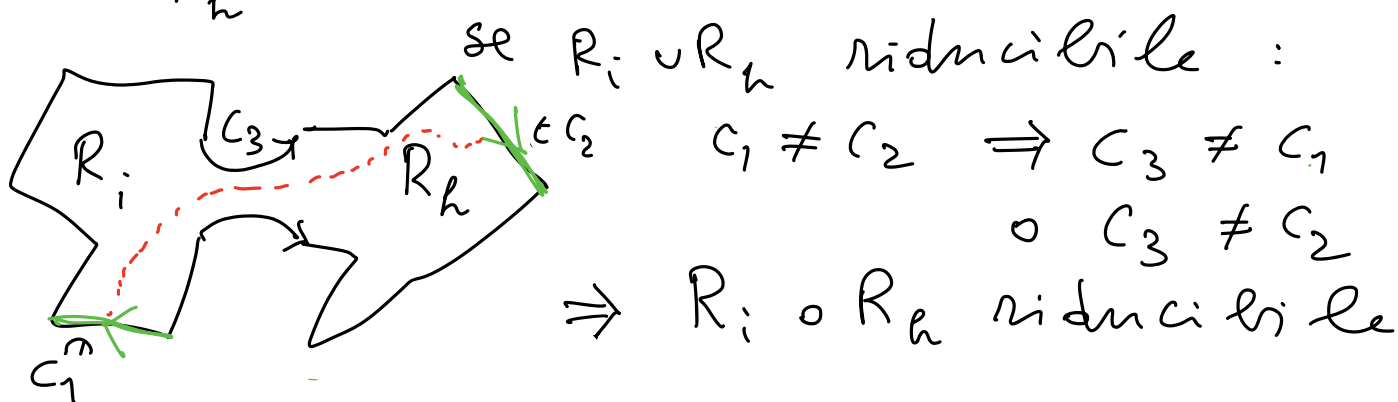
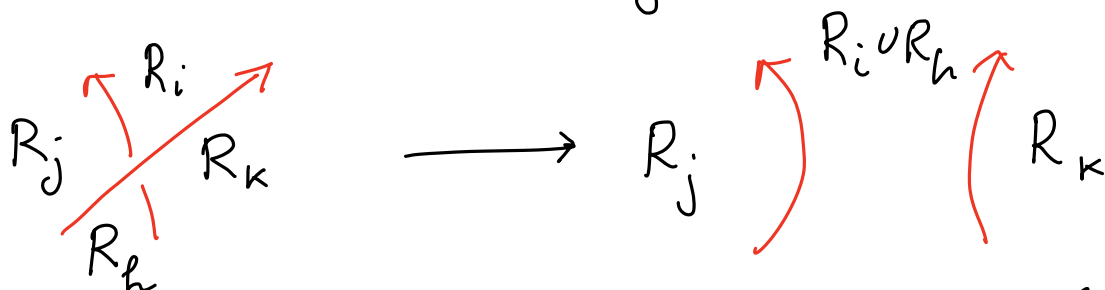


$\Rightarrow$ per concludere basta dimostrare
l'affermazione. Consideriamo l'**ombra**
di L associata a D , ovvero il
grafo 4-valente associato $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \subset S^2$

$$S^2 \setminus \Gamma = \bigcup_i R_i \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{componenti} \\ \text{connesse} \end{array}$$

Ogni lato di ogni R_i appartiene ad un cerchio di Seifert. Se due lati di R_i appartengono a cerchi discordi posso fare una mossa di riduzione e chiamo R_i **riducibile**.

Applicando una risoluzione orientata ad un incrocio due regioni si fondono:



$\Rightarrow$ il numero di regioni riducibili non può aumentare.

[...continua]

Poiché quando risolviamo un incrocio le regioni riducibili non aumentano, se $\exists$ regione riducibile $\subset S^2 \setminus \cup \{\text{cerchi di Seifert}\}$ di cerchi di Seifert, allora $\exists$ regione riducibile di $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Per concludere basta mostrare che: $\exists$ 2 cerchi di Seifert discordi, $\Rightarrow \exists$ regione riducibile $\subset S^2 \setminus \cup \{\text{cerchi di Seifert}\}$

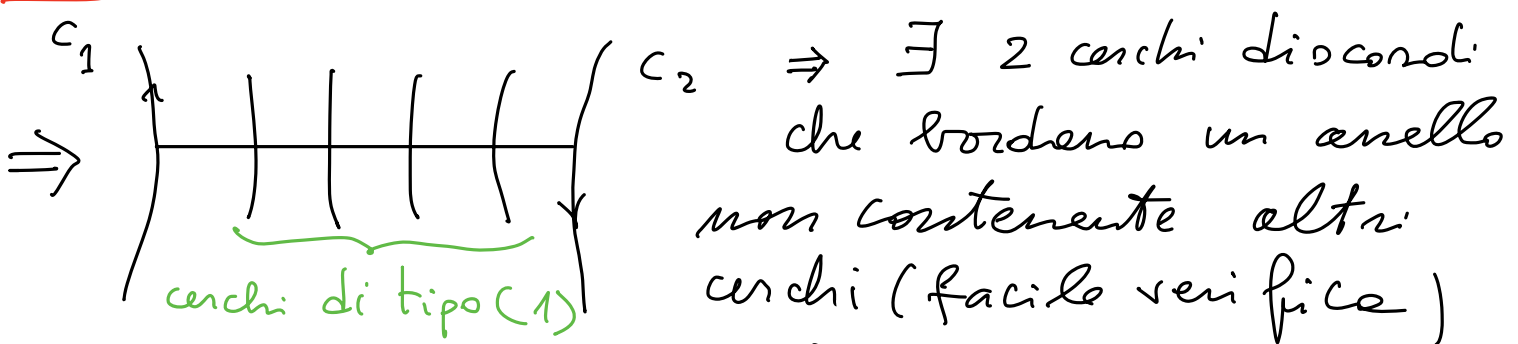
$c_1, c_2 \subset S^2$ discordi, $A \subset S^2$ anello, $\partial A = c_1 \cup c_2$, $\gamma \subset A$ cammino da c_1 a c_2

$c \subset S^2 \setminus c_1 \cup c_2$ altro cerchio di Seifert
 c separa c_1 e c_2 (1)

$\Rightarrow$ c non separa c_1 e c_2 (2)

(2) $\Rightarrow c$ borda disco $\subset A \Rightarrow$ possiamo supporre $\partial \cap c \neq \emptyset$ per tutti i cerchi di tipo (2).

FATTO: curva s.c. $\subset S^1 \times [0,1]$ non borde disco $\Rightarrow$ isotopa a $S^1 \times \{1/2\}$.



$\Rightarrow \exists$ regione riducibile $\subset S^2 \setminus \cup \{\text{cerchi di Seifert}\}$ ❌

IL GRUPPO DELLE TRECCHE

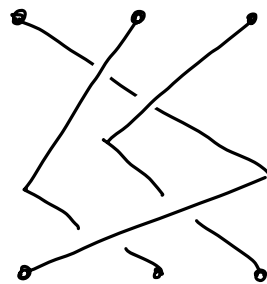
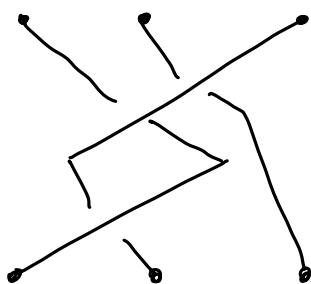
Fissato $n > 0$, consideriamo punti

$$A_i = (i, 0, 0), B_i = (i, 0, 1), i = 1, \dots, n, A_i, B_i \in \mathbb{R}^3.$$

Una spezzata poligonale da A_i a B_j si dice **ascendente** se ogni piano $z = c$, $0 \leq c \leq 1$ la interseca esattamente in 1 punto.

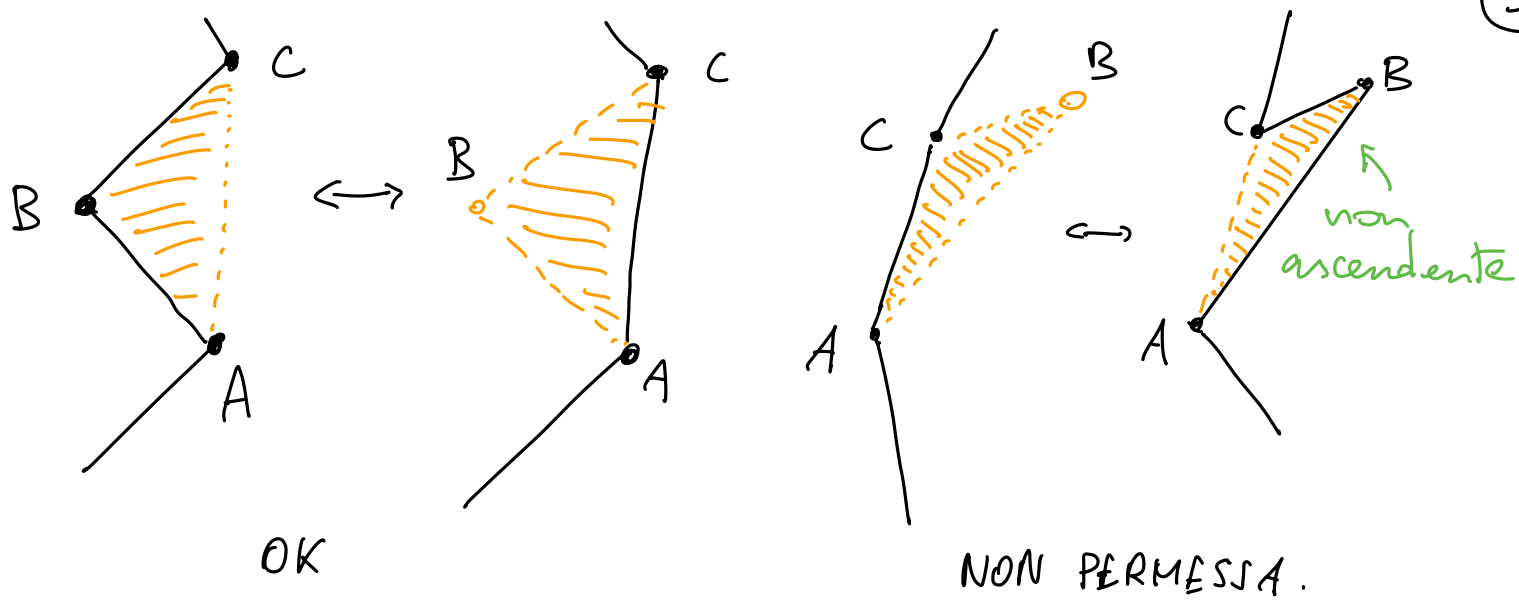
Un **treccia con n fili** è un insieme di n spezzate poligonali ascendenti, a 2 a 2 disgiunte, che congiungono i punti $A_1, \dots, A_n$ ai punti $B_1, \dots, B_n$ in qualsiasi ordine. Si dice anche **n -treccia**.

Esempi:



Definiamo una relazione di equivalenza tra n -treccie come nel caso dei link poligonali.

Notiamo che non tutte le Δ -mosse sono permesse:



Come nel caso dei link, disegneremo le n -trece in modo liscio. Da adesso in poi parleremo di n -trece intendendo le classi di equivalenza.

L'insieme B_n delle n -trece è un gruppo :

Date $a, b \in B_n$, il prodotto è la treccia ottenuta mettendo rappresentanti "schiacciati" uno sopra l'altro :

$$a \cdot b = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} .$$

Identità : $\underbrace{\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]}_n$

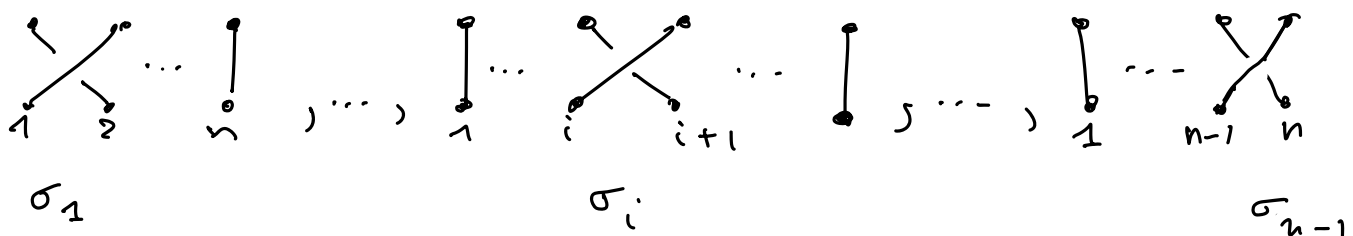
L'inverso b^{-1} di $b \in B_n$ si ottiene riflettendo b "schiacciato" rispetto al piano $z = \frac{1}{2}$:

es. : $\sim$

Come nel caso dei diagrammi di link, si dimostra che ogni treccia ha un rappresentante t.c. la proiezione nel piano xz è generica:

- (1) ammette solo punti doppi trasversi (incroci)
- (2) gli incroci hanno z -coordinate distinte

$\Rightarrow B_n$ è generato da:



Tra questi elementi valgono le relazioni:

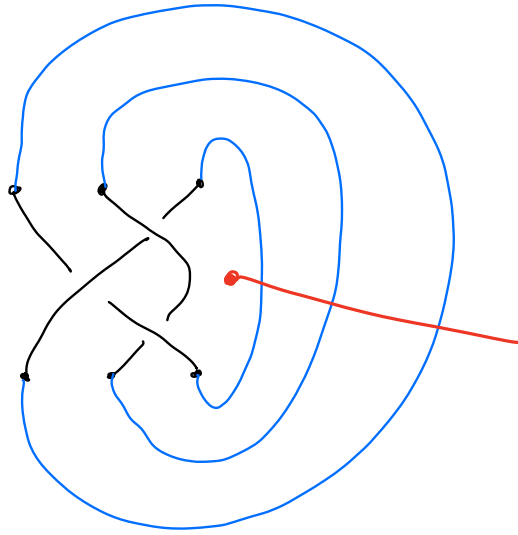
$$\bullet \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1, \quad (\Leftrightarrow R2)$$

$$\bullet \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{se } |i-j| > 1$$

$$\bullet \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (\Leftrightarrow R3)$$

Teorema (Artin): B_n ammette una presentazione con generatori $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relazioni date sopra.

DEF La **chiusura** di una treccia b è il link $\hat{b}$ ottenuto congiungendo i punti iniziali e finali di un diagramma di b nel modo seguente:



Notiamo che la chiusura di una treccia è una treccia chiusa nel senso definito in precedenza, e che il teorema di Alexander dice che ogni link orientato è equivalente alla chiusura di una treccia.

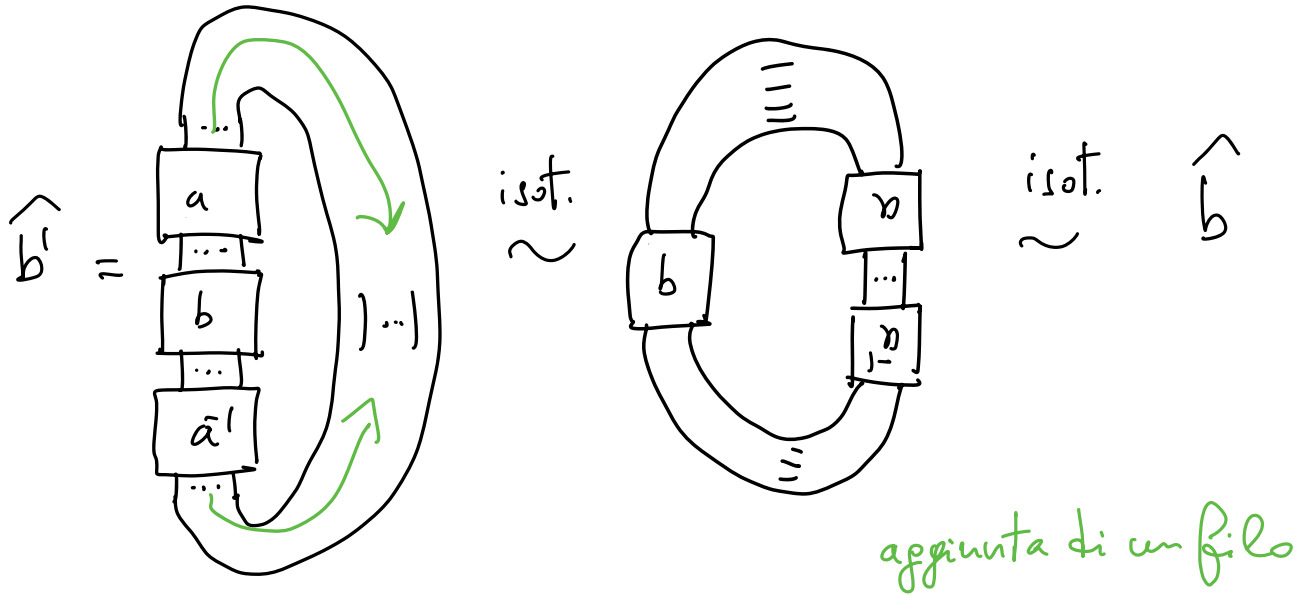
MOSSE E TEOREMA DI MARKOV

Si pone il problema di quando si ha $\hat{b} \sim \hat{b'}$.

Osserviamo che questo succede nelle seguenti due situazioni:

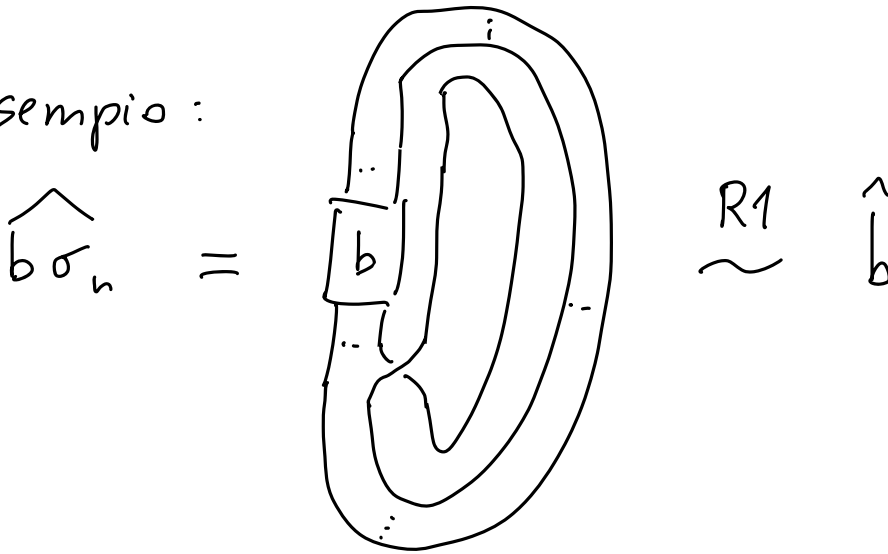
6

(1) $b' = a b \bar{a}'$, $a, b \in B_n$:



(2) $b' = b \sigma_n^{\pm 1}$, $b \in B_n \subset B_{n+1} \ni \sigma_n$

Esempio :



Teorema (Markov): le chiusure di due trece sono equivalenti se e solo se sono collegate da una successione finita delle

mosse:

(1) $b \leftrightarrow a b \bar{a}'$, $a, b \in B_n$

(2) $b \leftrightarrow b \sigma_n^{\pm 1}$, $b \in B_n \subset B_{n+1} \ni \sigma_n$



DEF: L'indice di intrecciamento di un link orientato $L \subset S^3$ è il minimo n.t.c. $L \sim \hat{b}$ per qualche $b \in B_n$.

OSS: La dimostrazione del Teorema di Alexander mostra che l'indice di intrecciamento di un link orientato è il minimo numero di cerchi di Seifert di un suo diagramma.

Come altri invarianti simili, l'indice di intrecciamento è estremamente difficile da calcolare. Un utile stima dal basso si può dare utilizzando il seguente invariante:

DEF Il polinomio *Homfly* di un link orientato $L \subset S^3$, indicato con $P_L(v, z)$ o $P(L)$, è definito dai seguenti assiomi:

1. (Invarianza): $P_L(v, z) = P_{L'}(v, z)$ se $L \sim L'$
2. (Normalizzazione): $U = \text{modo basele} \Rightarrow P_U(v, z) = 1$
3. (Relazione skein): $v^{-1} P(L_+) - v P(L_-) = z P(L_0)$

(2)

$$4. P(L_1 \cup L_2) = \delta P(L_1) \cdot P(L_2), \quad \delta = \frac{v^{-1} - v}{2}$$

P si può calcolare ricorsivamente usando un albero di risoluzioni fino ad arrivare a link banali.

L'esistenza di P ha varie dimostrazioni piuttosto lunghe, che non vedremo.

Teorema Il polinomio Homfly è un invariante di link orientati ben definito, a valori in $\mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. □

Confrontando gli assiomi ^{(di $P_L(v, z)$)} con le proprietà degli invarianti $\bar{\Delta}_L(x)$, $\nabla_L(z)$ e $V_L(t)$ vediamo che:

$$\bar{\Delta}_L(x) = P_L(1, x^{-1} - x)$$

$$\nabla_L(z) = P_L(1, z)$$

$$V_L(t) = P_L(t, t^{-1/2} - t^{1/2})$$

Proprietà: $P(2L) = P(L)$, $P_{mL}(v, z) = P_L(v^{-1}, z)$

Teorema (disuguaglianze di Morton-Franks-Williams, o MFW)

$L \subset S^3$ link orientato con diagramma D .

Allora:

$$w(D) - s(D) + 1 \leq \min \deg_v P_L(v, z) \leq \max \deg_v P_L(v, z) \leq w(D) + s(D) - 1.$$

$w(D)$ = writhe di D , $s(D)$ = n. di cerchi di Seifert

Oss: è sufficiente dimostrare l'ultima disuguaglianza: $P_{m_L}(v, z) = P_L(v', z) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min \deg_v P_L(v, z) &= - \max \deg_v P_{m_L}(v, z) \geq -w(mD) - s(mD) + 1 \\ &= w(D) - s(D) + 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

per l'ultima disug.

(link bande)

Lemma: D = diagramma ascendente di $\bigwedge L$

$$\Rightarrow s(D) + w(D) \geq \mu(L) \quad (= \text{n.ro di componenti})$$

ascendente $\equiv$ ogni componente ha un punto di

partenza partendo dal quale ogni incrocio si incontra la prima volta sul filo inferiore, e le componenti sono impilate salendo da 1, 2, ..., a $\mu(L)$.



dim.: Induzione su n.ro di incroci $c(D)$.

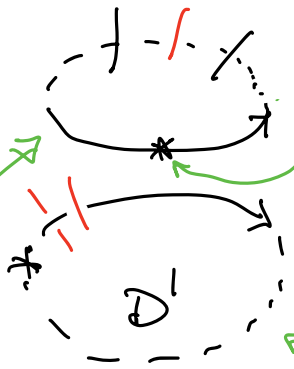
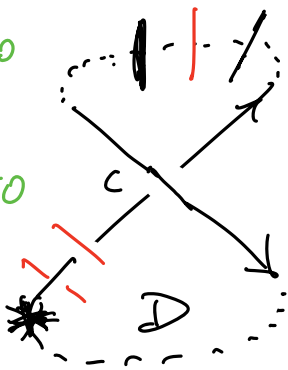
$$\underline{c(D) = 0} : \Rightarrow w(D) = 0, \quad s(D) = \mu(L) \Rightarrow \checkmark$$

$c(D) > 0$: se c = incrocio tra fili della stessa comp.

Supponiamo c = primo tale incrocio incontrato sulla prima componente nell'ordine, seguendo l'orientazione dal punto di partenza.

Sia D' = ottenuto da D risolvendo c in modo orientato:

esempio
con
 c positivo



nuovo punto
base che rende
 D' ascendente

$$\mu(D') = \mu(D) + 1$$

mettiamo questa componente subito sotto questa

$$w(D') = w(D) \pm 1,$$

D' ha un incrocio in meno $\Rightarrow$ per l'ipotesi induttiva

$$s(D') + w(D') \geq \mu(D') = \mu(D) + 1$$

||

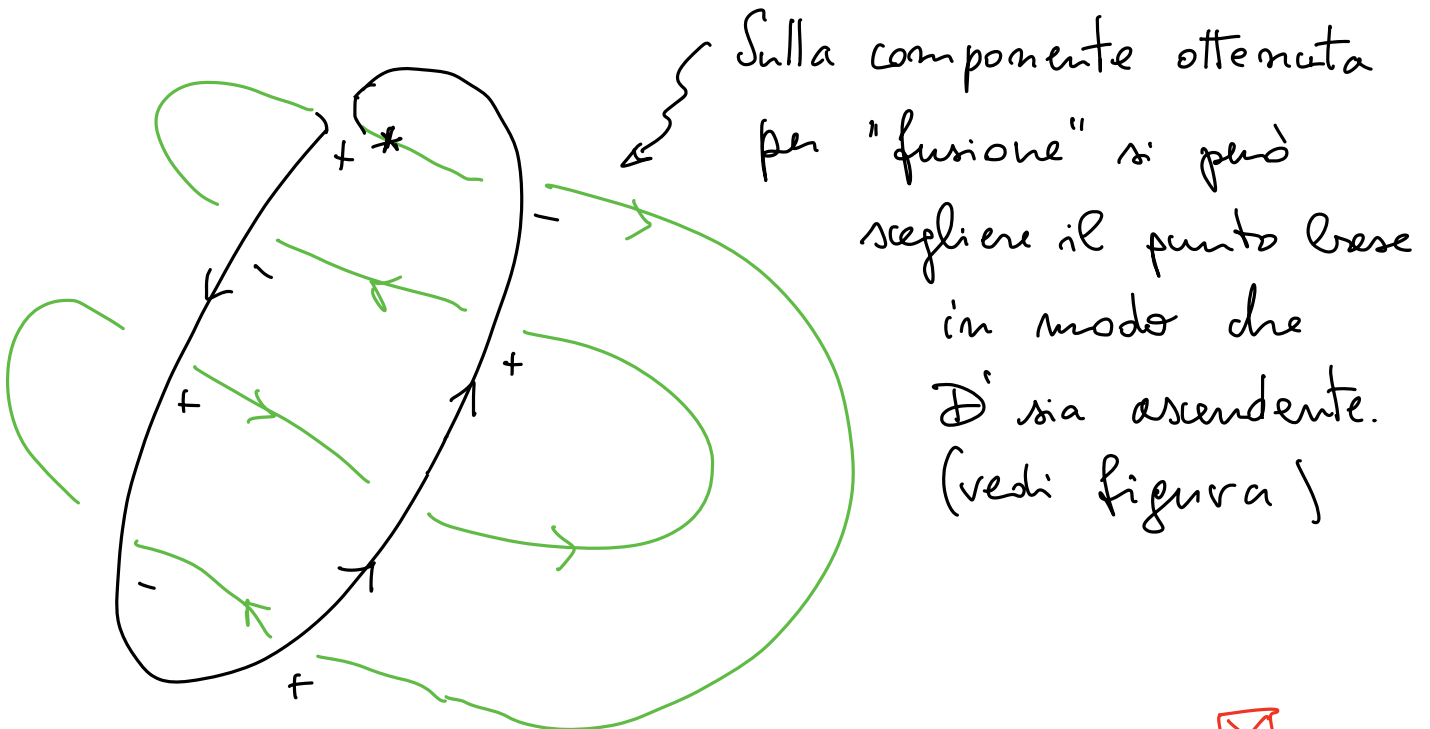
$$s(D) + w(D) \pm 1 \Rightarrow$$

$$s(D) + w(D) \geq \mu(D) + 1 \mp 1 \geq \mu(D) \quad \checkmark$$

Se non ci sono incroci tra fili di una stessa componente, possiamo supporre ciascuna componente del diagramma su un piano orizzontale, e a meno di scambiare i livelli delle componenti possiamo supporre ci sia un incrocio tra componenti su livelli adiacenti. La somma dei segni degli incroci tra quelle due componenti deve essere nulla $\Rightarrow \exists$ incrocio positivo. Risolvendolo, il nuovo diagramma D' soddisfa: $\mu(D') = \mu(D) - 1$, $w(D') = w(D) - 1$ e ha un incrocio in meno.

$$\Rightarrow \begin{matrix} s(D') + w(D') & \geq & \mu(D') = \mu(D) - 1 \\ & \text{"} & \end{matrix}$$

$$s(D) + w(D) - 1$$



(6)

dim del teorema: dobbiamo dimostrare

$$\max \deg_v P_L(v, z) \leq w(D) + s(D) - 1 \quad (*)$$

Poniamo: $\phi(D) := w(D) + s(D) - 1$. $(*)$

equivale a: $\max \deg_v \left(v^{-\phi(D)} \cdot P_L(v, z) \right) \leq 0 \quad (**)$

La relazione skein applicata ad un incrocio positivo dà:

$$P(D_+) = v^2 P(D_-) + v z P(D_0) \Rightarrow$$

$$v^{-\phi(D_+)} P(D_+) = v^{-\phi(D_+)+2} P(D_-) + v^{-\phi(D_+)+1} z P(D_0)$$

$$= v^{-\phi(D_-)} P(D_-) + v^{-\phi(D_0)} z P(D_0)$$

Quindi se $(**)$ vale per $D_-, D_0 \Rightarrow$ vale per D_+ .

In modo simile si mostra:

se $(**)$ vale per $D_+, D_0 \Rightarrow$ vale per D_- .

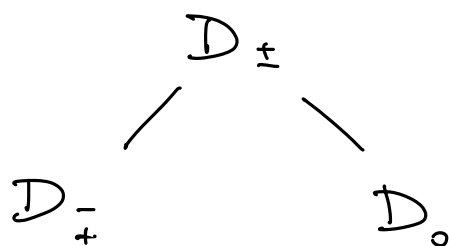
Argomentiamo per induzione sul numero di incroci.

Fissiamo una successione di incroci di D

scambiando i quali si ottiene un diagramma
ascendente D' .

Consideriamo un albero di risoluzioni in cui ad ogni nodo abbiamo:

(7)



Il nodo terminale più a sinistra dell'albero è D' .
 Poiché D' è ascendente, $P_{D'}(v, z) = \left[\frac{1}{v} (v' - v) \right]^{\mu(D') - 1}$,
 quindi
 $\max \deg_v (P_{D'}(v, z)) = \mu(D') - 1 \leq s(D') + w(D') - 1$
 per il lemma.

Per l'ipotesi induttiva, $(**)$ vale anche per gli altri nodi terminali, e per l'argomentazione con la relazione skein vale per D . □

Corollario: se $s(L)$ = indice di intrecciamento di L = link orientato $\subset S^3$, allora

$$s(L) \geq \frac{1}{2} \text{ampiezza}_v(P_L(v, z)) + 1,$$

dove $\text{ampiezza}_v(P) = \max \deg_v(P) - \min \deg_v(P)$.

Cenni sul gruppo fondamentale

Il **gruppo fondamentale** di un link $L \subset S^3$ è $\pi_1(S^3 \setminus L, p)$, dove $p \in S^3 \setminus L$.

Penseremo la classe di isomorfismo di questo gruppo come un invariante di L . In tal senso, la scelta di p è irrilevante. Chiaramente, il gruppo fondamentale di L è determinato dal tipo di omotopia dell'esterno X_L .

Fatti noti :

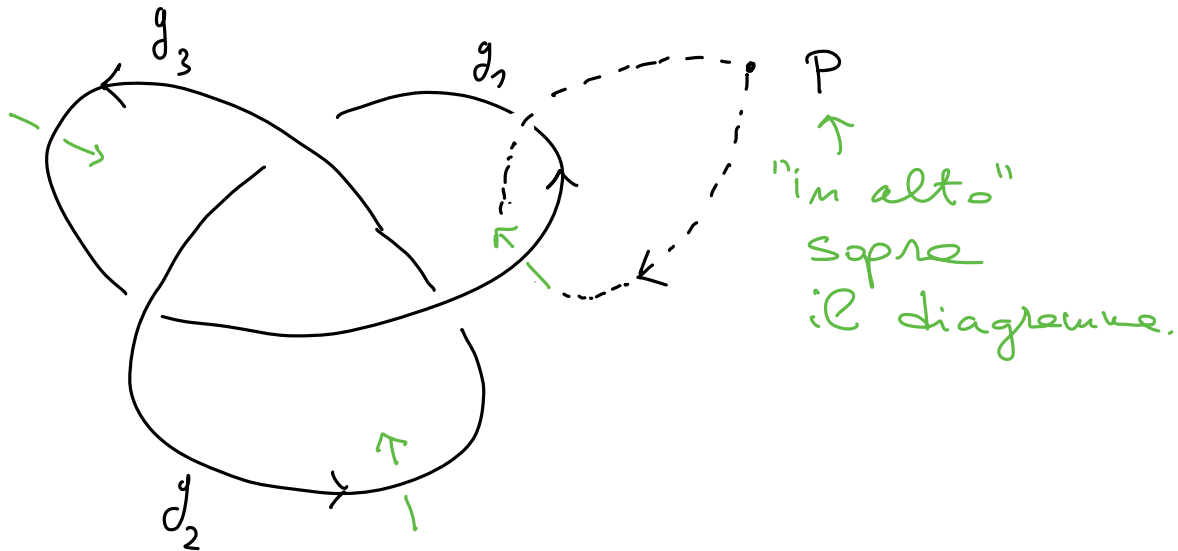
modo banale

- K nodo: $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus \downarrow) \cong \mathbb{Z} \Leftrightarrow K \sim U$
- esistono nodi (composti) distinti con esterni omotopicamente equivalenti (costruzione semplice)
- (Whitten + Gonzales-Acuña): K_1, K_2 nodi primi,
 $\pi_1(S^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_2) \Rightarrow S^3 \setminus K_1 \overset{\text{omeo.}}{\approx} S^3 \setminus K_2$
- (Gordon - Luecke): K_1, K_2 nodi, $S^3 \setminus K_1 \overset{\text{omeo.}}{\approx} S^3 \setminus K_2$
 $\Rightarrow K_1 \sim K_2$ oppure $K_1 \sim mK_2$.

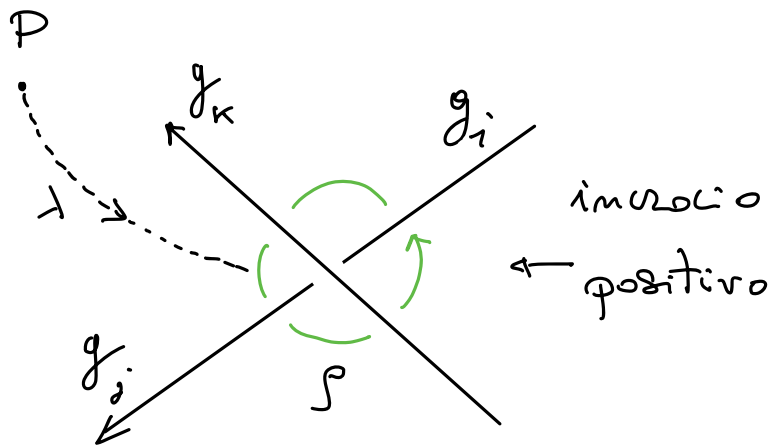
Presentazione del gruppo fondamentale.

(9)

Fissiamo un diagramma di L e orientiamolo in modo arbitrario. Ogni arco sovrappassante determina un generatore di $G := \pi_1(S^3 \setminus L)$:



Ogni incrocio fornisce una relazione:



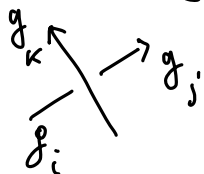
$\lambda, \rho, \lambda^{-1}$ contraibile in $S^3 \setminus L$

$\Downarrow$

$$g_j g_k^{-1} g_i^{-1} g_k = 1$$

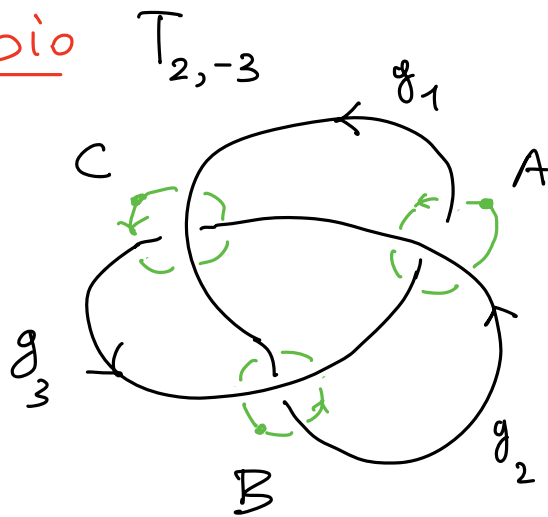
$$\Leftrightarrow g_j = g_k^{-1} g_i g_k$$

Un incrocio negativo fornisce: $g_j = g_k g_i g_k^{-1}$



Esempio

(10)



$$A : g_1 g_2 g_3^{-1} g_2^{-1}$$

$$B : g_2 g_3 g_1^{-1} g_3^{-1}$$

$$C : g_3 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1}$$

Fatto: ogni relazione segue dalle altre

$\Rightarrow$ Tenendo A e C :

$$\pi_1(S^3 \setminus T_{2,-3}) = \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_3^{-1} g_2^{-1}, g_3 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1} \rangle$$

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 g_2 g_1^{-1} \quad \Leftarrow \quad g_3 = g_1 g_2 g_1^{-1}$$

$$g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi_1(S^3 \setminus T_{2,-3}) &= \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2 \rangle \\ &\cong B_3 \end{aligned}$$